UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICAS

CUANTIZACIÓN FUNTORIAL

Trabajo de Grado presentado ante la Universidad Central de Venezuela por el ***Licenciado Alfonso Garmendia*** *para optar al título de Magister en Ciencias, mención Matemática.*

Tutor: Dr. Mauricio Angel.

Caracas, Venezuela
Julio, 2014

.

Resumen

En los inicios de la mecánica cuántica Dirac (ver [**11**]) plantea la importancia de partir de una teoría clásica para llegar a una teoría cuántica. A éste proceso se le denomina cuantización y no es un procedimiento único. Uno de los problemas asociados a la formalización del proceso de cuantización es su descripción como un funtor entre categorías. Sin embargo Van Hove (ver [**13**]) demostró que no existe un funtor entre la categoría de variedades simplécticas y la categoría de espacios de Hilbert con transformaciones unitarias que sea consistente con el procedimiento general de cuantización. Por otro lado, si partimos de una variedad de Poisson M, y se realiza una cuantización por deformación, aún es cuestión de estudio si éste procedimiento es funtorial.

En éste trabajo mostramos como la física clásica se puede representar por una variedad simpléctica o de Poisson, y como, dependiendo el proceso de cuantización, se le asigna a cada uno una estructura diferente para representar la física cuántica.

A mi familia, a mis amigos
y a todo aquel que sienta curiosidad
por ésta ciencia-arte de
las matemáticas.

Índice general

Introducción

El presente trabajo aborda el tema decuantizaión desde el punto de vista funtorial siguiendo los procedimientos de [**13**], [**19**],[**23**], [**30**] y [**15**]. En principio la cuantización se define de la categoría de variedades simplécticas a la categoría de espacios de Hilbert, sin embargo el teorema de Van Hove (ver [**13**]) demuestra la imposibilidad de construir éste funtor. Por tanto se replantea la cuantización como un funtor de la categoría de variedades de Poisson a la categoría de álgebras no asociativas.

Dada una variedad de Poisson M, éste último enfoque de la cuantización consiste en deformar el álgebra de los observables $(C^\infty(M),\cdot)$ en un álgebra no conmutativa, cuyo conmutador sea una deformación del álgebra de Lie $(M,\{-,-\})$, a éste procedimiento le denominaremos cuantización por deformación. Uno de los principales problemas de éste enfoque es la existencia de una cuantización para toda variedad de Poisson y si éste procedimiento es único salvo isomorfismos.

En éste rabajo queremos mostrar con detalle, la importacia de ver la cuantización como un funtor y los avances realizados en éste aspecto para la primera cuantización y la cuantización por deformación. Con éste motivo hemos dividido éste trabajo en tres capítulos, los dos primeros capítulos nos enfocamos en la parte matemática, mientras que el último capítulo mostramos la interpretación física.

El primer capítulo consiste en los preliminares. Aquí mostramos en que consiste deformar un álgebra asociativa y de Lie, luego veremos mas a fondo el espacio de éstas deformaciones. Además daremos un repaso de geometría diferencial, mostrando hechos importantes para éste trabajo junto con las definiciones de variedades simplécticas y de Poisson. Finalmente explicaremos las definiciones básicas de teoría de categorías y funtores, para luego introducir los

Operads, los cuales definen las reglas de las estructuras algebraicas y definen funtores entre éstas estructuras.

En el segundo capítulo mostraremos el teorema de Hochschild-Konstant-Rosenberg y el Teorema de Kontsevich. Éstos teoremas muestran la existencia de una cuantizacion por deformación para toda variedad de Poisson. Para éstos teoremas definimos el álgebra de los multioperadores diferenciales y utilizamos la estructura de Operads.

Finalmente, el último capítulo trata de cómo interpretar la física matemáticamente. Empezamos explicando los sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos, luego definiremos la primera cuantización, tomando al espácio cuántico como un espacio de Hilbert, luego mostraremos las razones para interpretar éste proceso como un funtor, entonces explicarmos como el teorema de Van Hove niega la existencia de un funtor acorde a la primera cuantización para luego finalizar con la cuantización por deformación.

Por cuestiones de practicidad, en este trabajo utilizaremos la siguiente notación:

- Id la función identidad en el conjunto correspondiente.
- $<,>$ como el producto interno usual sobre el espacio correspondiente.
- Para toda variable $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:
  - $\partial_{\vec{x}} := (\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$.
  - $d\vec{x} := (dx_1, \ldots, dx_n)$.

Además el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ incluye el cero.

Capítulo 1

Preliminares

1. Teoría de deformaciones

La teoría de deformación ha aparecido en varias ramas de la matemática bajo diferentes nombres. La formalización algebraica de la teoría de deformación, comienza con el estudio de las deformaciones de álgebras asociativas. En éste capítulo mostraremos los conceptos de deformación de álgebras asociativas y de deformación de álgebras de Lie diferenciales graduadas, siguiendo el esquema presentado en [**15**], [**21**] y [**22**].

En lo subsecuente denotaremos por $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica cero y $\mathbb{K}[t]^n := \mathbb{K}[t]/t^{n+1}\mathbb{K}[t]$ como la $\mathbb{K}$-álgebra de los polinomios de grado n. Observe que en $\mathbb{K}[t]^n$ posee un ideal máximal $m := t\mathbb{K}[t]^n$ y $\mathbb{K}[t]^n/m \simeq \mathbb{K}$. Note además que para toda $\mathbb{K}$-álgebra A se tiene que $A[t]^n = A \otimes \mathbb{K}[t]^n$.

1.1. Deformación de álgebras asociativas.

DEFINICIÓN 1.1. Sea (A, m_0) una $\mathbb{K}$-álgebra y $n \in \mathbb{N}$. Una n-deformación de m_0 con parámetro t, es una $\mathbb{K}$-álgebra $(A[t]^n, m_0 + m_t)$, donde:

$$m_t = \sum_{i=1}^{n} t^i \hat{m}_i$$

siendo $m_i \in Hom(A \otimes A, A)$ y $\hat{m}_i$ la extensión lineal de éstos elementos en $A \otimes \mathbb{K}[[t]]$.

Observe que bajo la relación de equivalencia en $a, b \in A \otimes \mathbb{K}[t]^n$ dada por:

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in A \otimes t\mathbb{K}[t]^n = tA[t]^n,$$

se satisface:

$$(A[t]^n, m_0 + m_t)/\sim = (A, m_0),$$

con lo cual, dada una deformación podemos recuperar el álgebra original reduciendo por el ideal maximal $tA[t]^n$.

Además para que una deformación $(A[t]^n, m_0 + m_t)$ sea una $\mathbb{K}$-álgebra, el nuevo producto m_0+m_t debe ser asociativo, ésto generará restricciones sobre los elementos $m_i \in Hom(A\otimes A, A)$. Por ejemplo, dada una 1-deformación $(A[t]^1, m_0+tm_1)$ de un álgebra $(A, m_0 = \cdot)$, entonces para todo $a = a_0 + ta_1, b = b_0 + tb_1, c = c_0 + tc_1 \in A[t]^1$:

$$\begin{aligned} m(m(a,b),c) &= m(a,m(b,c)) \\ (a\cdot b)\cdot c + t(m_1(a\cdot b,c) + m_1(a,b)\cdot c) &= a\cdot(b\cdot c) + t(m_1(a,b\cdot c) + a\cdot(m_1(b,c))) \\ m_1(a_0\cdot b_0,c_0) + m_1(a_0,b_0)\cdot c_0 &= m_1(a_0,b_0\cdot c_0) + a_0\cdot(m_1(b_0,c_0)). \end{aligned}$$

De ésta manera m es asociativo si, y sólo si, m_1 satisface:

$$a_0\cdot(m_1(b_0,c_0)) - m_1(a_0,b_0)\cdot c_0 - m_1(a_0\cdot b_0,c_0) + m_1(a_0,b_0\cdot c_0) = 0$$

para todo $a_0, b_0, c_0 \in A$.

Ejemplo 1.2. Dada una $\mathbb{K}$-álgebra $(A,\cdot)$. Si tomamos $m_1(a_0,b_0) := \kappa a_0\cdot b_0$ con $\kappa\in\mathbb{K}$ tenemos una deformación trivial dada por:

$$m(a,b) = a\cdot b + \kappa t\, a\cdot b.$$

•

De una manera más general, $m = m_0 + m_t = \sum_{i\in\mathbb{N}} t^i m_i$ es asociativo en $A[t]^n$ si, y sólo si, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} m(Id\otimes m) - m(m\otimes Id) &= 0 \\ \sum_{k=0}^{n} t^k \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\in\mathbb{N}}} m_i(Id\otimes m_j) - m_i(m_j\otimes Id) \right) &= 0 \\ \left(\sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\in\mathbb{N}}} m_i(Id\otimes m_j) - m_i(m_j\otimes Id) \right) &= 0 \quad \forall k. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.3. Dada una $\mathbb{K}$-álgebra A y una familia de operadores $m_i \in Hom(A\otimes A, A)$ con $i \geq 1$ definiremos a la k-ésima obstrucción como:

$$\delta m_k := \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j>0}} m_i(Id \otimes m_j) - m_i(m_j \otimes Id).$$

Entonces la condición de asociatividad se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \delta m_k &= -\sum_{\substack{i+j=k \\ i=0 \vee j=0}} m_i(Id \otimes m_j) - m_i(m_j \otimes Id), \\ \delta m_k &= m_0(m_k \otimes Id) - m_0(Id \otimes m_k) + m_k(m_0 \otimes Id) - m_k(Id \otimes m_0) \qquad \forall k \geq 1, \end{aligned}$$

el lado derecho de la igualdad es lo que más adelante definiremos como el diferencial de Hochschild de m_k, es decir $d_H(m_k)$.

DEFINICIÓN 1.4. Sea (A, m_0) una $\mathbb{K}$-álgebra. Dos deformaciónes de m_0 con parámetro t, $m = m_0 + m_t$ y $m^* = m_0 + m_t^*$, se consideran equivalentes si, y sólo si, existe una función $h : A[t]^n \to A[t]^n$ tal que:

(1) $h|_A = Id_A$,
(2) $h(m(a,b)) = m^*(h(a), h(b))$ para todo $a, b \in A[t]^n$.

LEMA 1.5. *La relación dada en la definición anterior es una relación de equivalencia.*

EJEMPLO 1.6. Dada $(A, \cdot)$ un álgebra, y $\kappa \in \mathbb{K}$. La deformación $(A[t]^n, \cdot)$ es equivalente a la deformación $(A[t]^n, m_t)$ siendo $m_t(a,b) = a\cdot b + \kappa t\, a\cdot b$ a través del morfismo $h(a_0 + t a_1) = a_0 + \kappa t a_1$. En éste caso ambas deformaciones se consideran triviales.

Por otro lado, dadas dos deformaciones $(A[t]^n, m)$ y $(A[t]^n, m^*)$, para todo $\tau, \kappa \in \mathbb{K}$, se tiene que $(A[t]^n, \tau m + \kappa m^*)$ es también una deformación. Por lo tanto, las n-deformaciones en A forman un $\mathbb{K}$-espácio.

El espacio cociente de las n-deformaciones de A con la relacion de equivalencia dada en 1.4, será denotado por $Def_n(A)$.

1.2. Deformación de álgebras de Lie.

DEFINICIÓN 1.7. Sea $(A,\{-,-\}_0)$ una $\mathbb{K}$-álgebra de Lie y $n\in\mathbb{N}$. Una n-deformación de $\{-,-\}_0$ con parámetro t, es una $\mathbb{K}$-álgebra $(A[t]^n,\{-,-\}_t)$, donde:

$$\{-,-\}_t=\sum_{i=0}^{n} t^i\{-,-\}_i^{\bullet}$$

tomando $\{-,-\}_i\in Hom(A\wedge A,A)$ y $\{-,-\}_i^{\bullet}$ como la extensión lineal de éstos elementos en $A\otimes\mathbb{K}[[t]]$.

De manera análoga a las deformaciones de álgebras asociativas, para que la n-deformación $(A[t]^n,\{-,-\}_t)$ sea una álgebra de Lie, $\{-,-\}_t$ debe ser antisimétrico y satisfacer Jacobi, es decir que para todo $a,b,c\in A[t]^n$:

$$\begin{aligned}\{a,b\}_t+\{b,a\}_t &= 0,\\ \{\{a,b\}_t,c\}_t+\{\{b,c\}_t,a\}_t+\{\{c,a\}_t,b\}_t &= 0,\end{aligned}$$

que podemos escribir en en términos de los $\{-,-\}_k\in Hom(A\wedge A,A)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\{a,b\}_k+\{b,a\}_k &= 0,\\ \sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\in\mathbb{N}}}\{\{a,b\}_j,c\}_i+\{\{b,c\}_j,a\}_i+\{\{c,a\}_j,b\}_i &= 0.\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.8. Dada un álgebra de Lie A y una familia de operadores antisimétricos $\{-,-\}_i\in Hom(A\wedge A,A)$, con $i\in\mathbb{N}$, definiremos a la k-ésima obstrucción de Lie como:

$$\delta_L\{-,-\}_k:=\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j>0}}\{\{a,b\}_j,c\}_i+\{\{b,c\}_j,a\}_i+\{\{c,a\}_j,b\}_i.$$

Usando la obstrucción podemos reescribir la condición de Jacobi como:

$$\{\{a,b\}_0,c\}_k+\{\{b,c\}_0,a\}_k+\{\{c,a\}_0,b\}_k+\{\{a,b\}_k,c\}_0+\{\{b,c\}_k,a\}_0+\{\{c,a\}_k,b\}_0=-\delta_L\{-,-\}_k,$$

para todo $k\geq 1$. El lado izquierdo de la igualdad es lo que más adelante definiremos como el diferencial de Chevalley-Eilenberg, $d_{CE}(\{-,-\}_k)$.

TEOREMA 1.9. *Dada* $(A, m_0 = \cdot)$ *una* $\mathbb{K}$*-álgebra asociativa, sea* $(A, \{-,-\})$ *el álgebra de Lie natural asociada a* (A, m_0)*, es decir, la álgebra dada por la relación:*

$$\{a,b\} = a \cdot b - b \cdot a,$$

para todo $a, b \in A$*. Entonces, toda deformación* m_t *de* m_0 *genera una deformación de* $\{-,-\}$*, dada por:*

$$\{a,b\}_t = m_t(a,b) - m_t(b,a),$$

para todo $a, b \in A \otimes \mathbb{K}[[t]]^n$*.*

1.3. Deformación de álgebras de Lie diferenciales graduadas.

DEFINICIÓN 1.10. Sea $L = \oplus_i L^i$ un $\mathbb{K}$-espacio graduado, $[-,-] : L \times L \to L$ un operador bilineal homogéneo y $d : L \to L$ un operador lineal de grado 1. La terna $(L, [-,-], d)$ es un álgebra de Lie diferencial graduada ó DGLA (por sus siglas en inglés) si satisface lo siguiente para todo $a, b, c \in L$:

- $[a,b] = -(-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b,a]$ (Antisimetría graduada),
- $[[a,b],c] = [a,[b,c]] - (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b,[a,c]]$ (Jacobi graduado),
- $d([a,b]) = [d(a),b] + (-1)^{\bar{a}}[a,d(b)]$ (Leibniz gradudado),
- $d \circ d = 0$ (Diferencial).

dónde $\bar{a}$ representa el grado de a.

Si $(L, [-,-], d)$ es una DGLA tenemos que $(Z = ker(d), [-,-], 0)$ y $(B = img(d), [-,-], 0)$ también lo son. Además es claro que $B \subset Z$, por la condición $d \circ d = 0$.

DEFINICIÓN 1.11. Dada $(L, [-,-], d)$ una DGLA, definiremos a la homología de L como el $\mathbb{K}$-espácio:

$$H(L,d) := \bigoplus_n \frac{Z^n}{B^n} = \bigoplus_n \frac{Ker(d) \cup L^n}{Img(d) \cup L^n}.$$

Observe que $(H(L,d), [-,-], 0)$ es una DGLA. Además a los elementos de Z^n los llamaremos n-cociclos y a los elementos de B^n n-cobordes.

Un ejemplo clásico de DGLA es el complejo de Hochschild. Éste complejo es muy importante para éste trabajo y su definición la mostramos a continuación:

DEFINICIÓN 1.12. Dado $(A,\cdot)$ una $\mathbb{K}$-álgebra, se define el complejo de Hochschild de A como el complejo dado por los siguientes datos:

(1) Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos:
- $C(A)_n := End(A^{\otimes n}, A)$
- Si $f \in C(A)_n$ su grado $\bar{f} := n-1$.

(2) $C^{\bullet}(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} C(A)_n$.

(3) Para todo $f, g \in C^{\bullet}(A)$ sea:
- $(f \circ g)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{\bar{f}+\bar{g}}) := \sum_{i=0}^{\hat{f}} (-1)^{i\bar{g}} f(a_0 \otimes \cdots \otimes g(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+\bar{g}}) \otimes \cdots \otimes a_{\bar{f}+\bar{g}})$
- $[f,g] := f \circ g - (-1)^{\bar{f}\bar{g}} g \circ f$.

(4) Sea $m \in C(A)_2$ dado por $m(a,b) = a \cdot b$ para todo $a, b \in A$, definimos:

$$d_H(f) = [m, f],$$

para todo $f \in C^{\bullet}(A)$.

TEOREMA 1.13. *Dada $(A,\cdot)$ un álgebra diferencial graduada. Sea $L^i = C(A)_{i+1}$, $L = \oplus L^i \simeq C^{\bullet}(A)$ entonces $(L, [-,-], d_H)$ es una DGLA.*

Demostración:
Sea $m \in C(A)_n$ dado por $m(a,b) = a \cdot b$ para todo $a, b \in A$, entonces:

$$d_H(f) = [m, f].$$

Por otro lado, como los elementos de $C^{\bullet}(A)$ son multilineales, es claro que $\circ$ y en consecuencia $[-,-]$ son bilineales y d_H es lineal.

Sólo falta probar las 4 condiciones dadas en la definición de DGLA:

- Antisimetría:

$$\begin{aligned}
[f,g] &= f \circ g - (-1)^{\bar{f}\bar{g}} g \circ f, \\
&= -(-1)^{\bar{f}\bar{g}} \left(g \circ f - (-1)^{\bar{f}\bar{g}} f \circ g \right), \\
&= -(-1)^{\bar{f}\bar{g}} [g, f]
\end{aligned}$$

- Jacobi: observe que

$$
\begin{aligned}
[[f,g],h] &= [(f\circ g)-(-1)^{\bar f\bar g}(g\circ f),h] \\
&= (f\circ g)\circ h-(-1)^{(\bar f+\bar g)\bar h}h\circ(f\circ g)+ \\
&\quad -(-1)^{\bar f\bar g}\left((g\circ f)\circ h-(-1)^{(\bar f+\bar g)\bar h}h\circ(g\circ f)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[f,[g,h]] &= [f,(g\circ h)-(-1)^{\bar g\bar h}(h\circ g)] \\
&= f\circ(g\circ h)-(-1)^{(\bar g+\bar h)\bar f}(g\circ h)\circ f+ \\
&\quad -(-1)^{\bar g\bar h}\left(f\circ(h\circ g)-(-1)^{(\bar f+\bar g)\bar h}(h\circ g)\circ f\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[g,[f,h]] &= g\circ(f\circ h)-(-1)^{(\bar f+\bar h)\bar g}(f\circ h)\circ g+ \\
&\quad -(-1)^{\bar f\bar h}\left(g\circ(h\circ f)-(-1)^{(\bar g+\bar f)\bar h}(h\circ f)\circ g\right).
\end{aligned}
$$

Además para cualquier $\phi\in C(A)_k$, $\psi\in C(A)_n$, $\varphi\in C(A)_m$ y denotando $a_i^j := a_i\otimes\cdots\otimes a_j$, se tiene que:

$\left((\phi\circ\psi)\circ\varphi-\phi\circ(\psi\circ\varphi)\right)(a_0\otimes\ldots\otimes a_{m+n+k})=$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j+n<i}(-1)^{im+jn}\phi\left(a_0^{j-1}\otimes\varphi\left(a_j^{j+n}\right)\otimes a_{j+n+1}^{i-1}\otimes\psi\left(a_i^{i+m}\right)\otimes a_{i+m+1}^{n+m+k}\right)+ \\
&\quad +\sum_{i+m<j}(-1)^{im+jn}\phi\left(a_0^{i-1}\otimes\psi\left(a_i^{i+m}\right)\otimes a_{i+m+1}^{i-1}\otimes\varphi\left(a_j^{j+n}\right)\otimes a_{j+m+1}^{n+m+k}\right).
\end{aligned}
$$

por lo que:

$$\left((\phi\circ\psi)\circ\varphi-\phi\circ(\psi\circ\varphi)\right)-(-1)^{\bar\varphi\bar\psi}\left((\phi\circ\varphi)\circ\psi-\phi\circ(\varphi\circ\psi)\right)=0,$$

y finalmente:

$$[[f,g],h]-[f,[g,h]]+(-1)^{\bar f\bar g}[g,[f,h]]=0.$$

- Leibniz:

$$\begin{aligned} d_H([f,g]) &= [m,[f,g]] = (-1)^{\bar{f}+\bar{g}}[[m,f],g] + (-1)^{\bar{f}}[f,[m,g]] \\ &= [d_H(f),g] + (-1)^{\bar{f}}[f,d_H(g)]. \end{aligned}$$

- Diferencial:

  Observe que por la antisimetría $[m,m]=0$. Entonces:

$$(d_H \circ d_H)(f) = -[m,[m,f]] = -2[[m,m],f] = 0.$$

Y con ésto queda demostrado que el complejo de Hochschild es una DGLA •

LEMA 1.14. *Dada $(L,[-,-],d)$ una DGLA y $\mathbb{A}$ un álgebra conmutativa, existe una estructura natural de DGLA sobre $L\otimes\mathbb{A}$ dada por:*

$$d(x\otimes a) = dx\otimes a, \qquad [x\otimes a, y\otimes b] = [x,y]\otimes ab$$

para todo $x,y\in L$ y $a,b\in A$.

DEFINICIÓN 1.15. Sea $(L,[-,-],d)$ una DGLA. Una n-deformación del diferencial d es una DGLA $(L\otimes\mathbb{K}[t]^n, [[-,-]], d_a)$ dónde:

- $[[-,-]] := [-,-]$ es el corchete natural sobre $L\otimes\mathbb{K}[t]^n$.
- $d_a := d + [a,-]$ para algún $a\in L^1\otimes t\mathbb{K}[t]^n$.

Dado que $[[-,-]] = [-,-]$ está dado por la estructura natural en $L\otimes\mathbb{K}[t]^n$ usaremos $(L\otimes\mathbb{K}[t]^n,[-,-],d_a)$ en lugar de $(L\otimes\mathbb{K}[t]^n,[[-,-]],d_a)$ para referirnos a una deformación. Además, si no hay lugar a confusión, nos referiremos a la deformación como d_a.

Observe que, tomando la relación de equivalencia sobre los elementos $a,b\in L\otimes\mathbb{K}[t]^n$ dada por:

$$a\simeq b \Leftrightarrow a-b\in L\otimes t\mathbb{K}[t]^n,$$

se tiene, para toda deformación $(L\otimes\mathbb{K}[t]^n,[-,-],d_a)$, que:

$$((L\otimes\mathbb{K}[t]^n,[-,-],d_a)/\sim) \cong (L,[-,-],d),$$

es decir, al reducir una deformación por el ideal máximal $t\mathbb{K}[t]^n$ se obtiene la estructura original.

Por otro lado, debido al lemma 1.14 tenemos que $(L\otimes\mathbb{K}[t]^n, [-,-], d)$ es una DGLA, por lo tanto para que $(L\otimes\mathbb{K}[t]^n, [-,-], d_a)$ sea una DGLA sólo se requiere que d_a satisfaga la condición de Leibniz y la del diferencial. Pero la condición de Leibniz se cumple naturalmente, por lo siguiente:
Sean $x, y \in L\otimes\mathbb{K}[t]^n$ cualesquiera.

$$\begin{aligned} d_a([x,y]) &= d([x,y]) + [a,[x,y]] \\ &= ([dx,y] + (-1)^{\hat{x}}[x,dy]) + ([[a,x],y] + (-1)^{\hat{x}}[[a,y],x]) \\ &= [d_a x, y] + (-1)^{\hat{x}}[x, d_a y]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que $(L\otimes\mathbb{K}[t]^n, [-,-], d_a)$ sea una DGLA sólo se necesita verificar la condición del diferencial para d_a.

TEOREMA 1.16. *Sea $(L,[-,-],d)$ una DGLA. $(L\otimes\mathbb{K}[t]^n, [-,-], d+[a,-])$ es una n-deformación de L si, y sólo si, $a \in L\otimes t\mathbb{K}[t]^n$ satisface:*

$$d(a) + \frac{1}{2}[a,a] = 0,$$

llamada ecuación de Maurer-Cartan.

Demostración:
Para que $(L[t]^n, [,], d+[a,-])$ es una deformación de L si y sólo si:

$$(d+[a,-])\circ(d+[a,-]) = 0.$$

Veamos con más detalle el lado derecho de ésta igualdad:

$$\begin{aligned}(d+[a,-])\circ(d+[a,-])(b) &= d^2(b)+d([a,-])(b)+[a,-](d)(b)+[a,-]([a,-])(b)\\ &= d([a,b])+[a,d(b)]+[a,[a,b]]\\ &= [d(a),b]-[a,d(b)]+[a,d(b)]+[a,[a,b]]\\ &= [d(a),b]+\frac{1}{2}[[a,a],b]\\ &= [d(a)+\frac{1}{2}[a,a],b].\end{aligned}$$

ésto es cero para todo b si, y sólo si:

$$d(a)+\frac{1}{2}[a,a]=0,$$

con lo que queda demostrado el teorema. •

A partir de ahora consideraremos el siguiente conjunto de soluciones de la ecuacion de Maurer-Cartan:

$$MC_n(L):=\{a\in L_1\otimes t\mathbb{K}[t]^n/d(a)+\frac{1}{2}[a,a]=0\}.$$

Por otro lado, hay deformaciones que se consideran equivalentes. Antes de ver ésta equivalencia, vemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.17. Sea A una $\mathbb{Q}$-álgebra con identidad e y $g\in A$ nilpotente, definimos al elemento:

$$exp(g):=\sum_k\frac{(g)^k}{k!}.$$

Si m es un ideal nilpotente de A, podemos definir la función $exp():m\to e+m$ que a cada $g\in m$ le asigna su exponencial.

OBSERVACIÓN 1.18. Observe que para el álgebra $\mathbb{K}[t]^n$ todo elemento $h\in t\mathbb{K}[t]^n$ es nilpotente. Además, dado L una DGLA, y $g\in L\otimes t\mathbb{K}[t]^n$, la función $[g,-]$ es nilpotente.

DEFINICIÓN 1.19. Sea $(L,[-,-],d)$ una DGLA y $a,b\in MC_n(L)$. Diremos que las deformaciones $(L\otimes\mathbb{K}[t]^n,[-,-],d_a)$ y $(L\otimes\mathbb{K}[t]^n,[-,-],d_b)$ son equivalentes, si existe $g\in L^0\otimes t\mathbb{K}[t]^n$ tal que:

$$(d+[a,-])(exp([g,-]))=exp([g,-])(d+[b,-]).$$

en éste caso diremos además que $b \sim_d a$.

Esencialmente la definición anterior expresa que debe existir un monomorfismo ϕ de grado cero en $L \otimes \mathbb{K}[t]^n$ que satisfaga $(d + [a, -])(\phi) = \phi(d + [b, -])$, tal que al reducirlo a L sea la identidad y que al mismo tiempo provenga de un elemento $g \in L \otimes t\mathbb{K}[t]^n$. Para más detalles sugerimos al lector revisar los articulos página 21 de [**15**], página 4 de [**21**] y página 1 y 2 de [**22**].

LEMA 1.20. $\sim_d$ *es una relación de equivalencia*

DEFINICIÓN 1.21. Dada L una DGLA, denotaremos por $\sim$ la relación de equivalencia definida en 1.19. Definiremos el conjunto de n-deformaciones de L por $Def_n(L) := MC_n(L)/\sim$.

A continuación mostraremos una relación entre las n-deformaciones de una $\mathbb{K}$-álgebra asociativa A, con las n-deformaciones de $C^\bullet(A)$.

TEOREMA 1.22. *Sea* (A, m_0) *una* $\mathbb{K}$*-álgebra asociativa.* $(A[t]^n, m_t = m_0 + m_t)$ *es una* n*-deformación de* A *si, y sólo si,* $(C^\bullet(A) \otimes \mathbb{K}[t]^n, [-,-], d + [m_t, -])$ *es una* n*-deformación de* $C^\bullet(A)$ *como DGLA.*

Demostración:
m_t genera una deformación en A si, y sólo si, $m_0 + m_t$ es asociativo, i.e.:

$$\begin{aligned}
0 &= (m_0 + m_t)((m_0 + m_t) \otimes Id) - (m_0 + m_t)(Id \otimes (m_0 + m_t)) \\
&= m_0(m_0 \otimes Id) - m_0(Id \otimes m_0) + \\
&\quad + m_0(m_t \otimes Id) + m_t(m_0 \otimes Id) - m_0(Id \otimes m_t) - m_t(Id \otimes m_0) + \\
&\quad + m_t(m_t \otimes Id) - m_t(Id \otimes m_t) \\
&= 0 + d_H(m_t) + \frac{1}{2}[m_t, m_t].
\end{aligned}$$

Por lo que m_t es deformación de A si y sólo si, satisface la ecuación de Maurer-Cartan, además dado m_t de la forma:

$$m_t = \sum_{i=1}^{n} t^i \hat{m}_i$$

se concluye que $m_t \in tC_2(A)[[t]] = C_2(A) \otimes t\mathbb{K}[t]^n$. Finalmente m_t es una deformación de m_0 si, y sólo si, $d + [m_t,]$ es una n-deformación de $C^\bullet(A)$. •

Observe además que:

$$d_H(m_t) = \sum_k t^k d_H(m_k) \qquad y \qquad \frac{1}{2}[m_t, m_t] = -\sum_k t^k \delta m_k,$$

entonces la ecuación de Maurer-Cartan también se puede escribir como:

$$d_H(m_k) = \delta m_k \qquad \forall k \leq n.$$

TEOREMA 1.23. *Dada (A, m_0) una $\mathbb{K}$-álgebra y dos deformaciónes de m_0 con parámetro t son equivalentes si, y sólo si, las deformaciones que generan sobre $C^\bullet(A)$ son equivalentes como deformaciones de DGLA.*

Demostración:

Dadas dos deformaciones de (A, m_0), $m_0 + m_t$ y $m_0 + m_t^*$. Éstas deformaciones son equivalentes si, y sólo si, existe un $h \in Hom(A[t]^n, A[t]^n) \simeq C_1(A) \otimes K[t]^n$ tal que:

(1) $h|_A = Id_A$,

(2) $h(m_0 + m_t)(a,b) = (m_0 + m_t^*)(h(a), h(b))$ para todo $a, b \in A[t]^n$.

Por otro lado, como $h|_A = Id_A$ entonces $h = Id + g$ dónde $g \in C_0(A) \otimes tK[t]^n$.
Finalmente g es el elemento dado en la equivalencia de las deformaciones de $C^\bullet A$ como DGLA.
•

EJEMPLO 1.24. Observemos explicitamente el caso de las 1-deformaciones. Dada A un álgebra y $m_0 + m_t$ y $m_0 + m_t^*$ dos 1-deformaciones equivalentes. Sea $h \in C_1(A) \otimes \mathbb{K}[t]^1$ el homomorfismo de equivalencia, podemos tomar $h = Id + g$ dónde $g \in C_1(A) \otimes t\mathbb{K}[t]^1$.
Sean $a = a_0 + ta_1, b = b_0 + tb_1 \in A[t]^1$ cualesquiera. Entonces la ecuación $h(m_0 + m_t)(a,b) = (m_0 + m_t^*)(h(a), h(b))$ se reduce a:

$$m_t(a_0, b_0) - m_t^*(a_0, b_0) = t\left(a_0 g_1(b_0) - g_1(a_0 b_0) + g_1(a_0) b_0\right)$$

que es equivalente a:

$$m_t - m_t^* = d(g)$$

Por otro lado, tomando la relación de 1.19 tenemos:

$$d+[m_t,-](exp([g,-]))=exp([g,-])(d+[m_t^*,-])$$

Dado que estamos en $A[t]^1$ se tiene que g es nilpotente de orden 2, por lo tanto la exponencial se reduce como $\exp([g,-])=Id+[g,-]$ y así tenemos que:

$$\begin{aligned}
d+[m_t,-](\exp([g,-]))&=\exp([g,-])(d+[m_t^*,-]),\\
d+[m_t,-](Id+[g,-])&=(Id+[g,-])(d+[m_t^*,-]),\\
d+[m_t,-]+d([g,-])+[m_t,[g,-]]&=d+[m_t^*,-]+[g,d+[m_t^*,-]],\\
[m_t,-]+d([g,-])+[m_t,[g,-]]&=[m_t^*,-]+[g,d(-)]+[g,[m_t^*,-]],\\
[m_t-m_t^*,-]&=[g,d(-)]-d([g,-])+[g,[m_t^*,-]]+[m_t,[g,-]],\\
[m_t-m_t^*,-]&=[d(g),-]+[g,[m_t^*,-]]+[m_t,[g,-]],
\end{aligned}$$

Además, como $m_t^*, m_t, g\in C_0(A)\otimes t\mathbb{K}[t]^1$ pertenecen al ideal nilpotente con nilpotencia 2, entonces se tiene que $[g,[m_t^*,-]]=[m_t,[g,-]]=0$ y finalmente:

$$[m_t-m_t^*,-]=[d(g),-].$$

Con lo que se concluye explícitamente que ambas relaciones son iguales en el caso de 1-deformaciones.

Finalmente se deduce que las deformaciones de A están dadas por las deformaciones de $C^\bullet(A)$, i.e.:

$$Def_n(A)\simeq Def_n(C^\bullet(A)).$$

Por otro lado para las deformaciones de álgebras de Lie, definiremos el siguiente complejo:

Definición 1.25. Dado $(A,\{-,-\})$ una $\mathbb{K}$-álgebra de Lie, se define el complejo Chevalley-Eilenberg de A como el complejo dado por los siguientes datos:

(1) Para cada $n\in\mathbb{N}$ tenemos:
- $CE(A)_n := End(A^{\wedge n},A)$
- Si $f\in CE(A)_n$ su grado $\bar{f}:=n-1$.

(2) $CE^\bullet(A)=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} CE(A)_n$.

(3) Para todo $f, g \in C^\bullet(A)$ sea:
- $(f \circ g)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{\bar{f}+\bar{g}}) := \sum_{\sigma \in S_{\bar{f}+\bar{g}}} sign(\sigma) f(g(a_{\sigma(0)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(\bar{g})}) \wedge a_{\sigma(\bar{g}+1)} \cdots \wedge a_{\sigma(\bar{f}+\bar{g})})$
- $[f, g] := f \circ g - (-1)^{\bar{f}\bar{g}} g \circ f$.

(4) Sea $\mu \in CE(A)_2$ dado por $\mu(a,b) = \{a,b\}$ para todo $a, b \in A$, definimos:

$$d_{CE}(f) = [\mu, f],$$

para todo $f \in CE^\bullet(A)$.

Con el cual se satisface el siguiente teorema:

TEOREMA 1.26. *Dada A un álgebra de Lie, $CE^\bullet(A)$ es una DGLA. Además:*

$$Def_n(A) \simeq Def_n(CE^\bullet(A)).$$

La demostración de éste teorema es análoga al caso de álgebras asociativas. Para más referencias ver [**15**].

2. Geometría diferencial

En ésta sección seguiremos a [**7**] para mostrar la estructura de variedades simplécticas y de Poisson. Supondremos que el lector ya conoce los conceptos básicos de geometría diferencial. En lo subsecuente M denotará una variedad real de dimensión finita.

DEFINICIÓN 1.27. Dado $\mathbb{K}$ un cuerpo, n **fibrado** sobre una variedad M consiste en lo siguiente:

- Una variedad F.
- Una función $\Pi : F \to M$
- Un espacio vectorial V.
- Para cada $p \in M$ una estructura de espácio vectorial sobre $F_p := \pi^{-1}(p)$ llamada fibra.

Tal que se satisfaga lo siguiente:

(1) Para cada $p \in M$ se tiene que $V \simeq \Pi^{-1}(p)$ es decir son homeomorfos e isomorfos como espacios vectoriales.

(2) Para todo abierto $U \subset M$ existe un diffeormorfismo $\Phi_U : \Pi^{-1}(U) \to U \times V$, tal que, para todo $p \in U$ se satisface que $\Phi_U|_{F_p} : F_p \to V$ sea un isomorfismo de espacios vectoriales.

DEFINICIÓN 1.28. Dada M una variedad y $\Pi : F \to M$ un fibrado sobre M. Una sección sobre Π es una función $\Gamma : M \to F$ tal que $\Pi(\Gamma) = Id_M$, es decir es una función que a cada elemento $p \in M$ le asigna un elemento de F_p.

2.1. Fibrado Tangente y Cotangente.

DEFINICIÓN 1.29. El fibrado tangente de M esta dado por:

- La variedad $TM := \bigsqcup_{p\in M} T_p(M)$, dónde $T_p(M)$ es el espacio tangente a $p \in M$.
- La proyección canónica $\Pi : TM \to M$.

PROPOSICIÓN 1.30. *Si M es compacta y de dimensión n, el espacio de secciones sobre el fibrado TM es isomorfo a $C^\infty(M)^n$.* •

DEFINICIÓN 1.31. Un campo sobre M es unas seccion sobre el fibrado TM. Éstos campos generan un $\mathbb{R}$-espacio al que denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$.

DEFINICIÓN 1.32. El fibrado cotangente de M esta dado por:

- La variedad $T^*M := \bigsqcup_{p\in M} T_p^*(M)$.
- La proyección canónica $\Pi : T^*M \to M$.

PROPOSICIÓN 1.33. *Si M es compacta y de dimensión n, el espacio de secciones sobre el fibrado T^*M es isomorfo a $C^\infty(M)^n$.* •

DEFINICIÓN 1.34. Una 1-forma sobre M es una sección sobre el fibrado T^*M. Las 1-formas generan un $\mathbb{R}$ espacio al que denotaremos por $\Omega^1(M)$.

DEFINICIÓN 1.35. Un flujo sobre M es una acción suave de $(\mathbb{R},+)$ como grupo sobre $\mathbb{C}^\infty(M,M)$, es decir una función diferenciable $F : \mathbb{R} \times M \to M$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$, $F_t(-) = F(t,-) : M \to M$ sea suave, para todo $p \in M$ $F_p(-) = F(-,p) : \mathbb{R} \to M$ sea suave, $F_0(p) = p$ y además $F_t(F_h) = F_{t+h}$.

Es importante tomar en cuenta la siguiente:

- Todo flujo $F : \mathbb{R} \times M \to M$ genera el campo:

$$X_F(p) := (F_p)'(0).$$

- Toda función $L: M \to \mathbb{R}$ genera la uno forma:

$$dL := \partial_{\vec{x}} L.$$

- Dada una función $L : M \to \mathbb{R}$ y un flujo $F : \mathbb{R} \times M \to M$ tenemos que: $< dL, X_F > \in C^\infty(M)$ representa la derivada de L en la dirección de $F_p'(0)$.
- Dado dada una función suave $\varphi : M \to M$, $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ con flujos F_t^X y F_t^Y respectivamente, si:

$$\varphi(F_t^X) = F_t^Y.$$

  Entonces por regla de la cadena tenemos que:

$$Y = \frac{\partial F_t^Y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(F_t^X)}{\partial t} = J\varphi \cdot \frac{\partial F_t^X}{\partial t} = J\varphi \cdot X,$$

  donde J representa el jacobiano.

DEFINICIÓN 1.36. Sean M y N dos n-variedades y $\varphi : M \to N$ un difeomorfismo entre variedades, se define el **push-forward** de $X \in \mathfrak{X}(M)$ a través de φ como

$$\varphi^* X = J\varphi X(\varphi^{-1}).$$

DEFINICIÓN 1.37. El **corchete de Lie para campos vectoriales** es una operación bilineal $[-,-] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por:

$$[X, Y]_p = (JX)_p \cdot Y_p - (JY)_p \cdot X_p,$$

para todo $X, Y, \in \mathscr{X}(M)$.
Dónde $(JX)_p$ es la matriz jacobiana de X en el punto p.

LEMA 1.38. *Sean $X, Y, \in \mathfrak{X}(M)$, si existe un flujo F tal que $(F_p)'(0) = X(p)$ se tiene que:*

$$\frac{\partial F_t^* Y}{\partial t}|_{t=0} = [X, Y].$$

DEFINICIÓN 1.39. (Complejo de De Rham) El complejo de De Rham consiste en:

- Las k formas diferenciales dadas por el espacio $\Omega^k(M) := (\Omega^1(M))^{\wedge k}$.
- El espacio graduado de formas dado por $\Omega^\bullet(M) := \bigoplus_k \Omega^k(M)$.

- El diferencial de De Rham $d_R : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ dado por:

$$\begin{aligned}(d_R\omega)(X_1,...,X_{k+1}) &= \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\left\langle d(\omega(X_1,...,\hat{X}_i,...,X_{k+1})),X_i\right\rangle\right. \\ &\left. +\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,...,\hat{X}_i,...,\hat{X}_j,...,X_{k+1})\right).\end{aligned}$$

dónde $\hat{X}_i$ significa la omisión de X_i.

DEFINICIÓN 1.40.

(1) Una forma cerrada sobre M es una forma diferencial $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ tal que $d_R\omega = 0$.
(2) Dado $\omega \in \Omega^\bullet(M)$, se dice que ω es una forma exacta sobre M si existe $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$ tal que $\omega = d_R\alpha$.

DEFINICIÓN 1.41. Sea $\varphi : M \to M$ suave, $\omega \in \Omega^k(N)$ y $X_1,...,X_k \in \mathfrak{X}(M)$ se define el **pull-back** de ω sobre φ como:

$$(\varphi^*\gamma)(X_1,...,X_k)_{(p)} = \gamma(\varphi^*X_1,...,\varphi^*X_k)_{(\varphi(p))}.$$

DEFINICIÓN 1.42. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos $i_X : \Omega^n(M) \to \Omega^{n-1}(M)$ como:

$$(i_X\omega)(X_1,\dots,X_{n-1}) = \omega(X,X_1,\dots,X_{n-1}),$$

para todo $\omega \in \Omega^n(M)$ y $X_1,\dots,X_{n-1} \in \mathfrak{X}(M)$.

DEFINICIÓN 1.43. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ definiremos la derivada de Lie de X como la función $\mathfrak{L}_X : \Omega^\bullet \to \Omega^\bullet$, dada por:

$$\mathfrak{L}_X\omega(X_1,...,X_k) = \sum_{i=1}^{k}\omega(X_1,...,[X,X_i],...,X_k) - \langle d\,\omega(X_1,...,X_k),X\rangle\,.$$

LEMA 1.44. *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, si existe un flujo F tal que $(F_p)'(0) = X(p)$ entonces:*

$$\mathfrak{L}_X\omega = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(F_t^*\omega).$$

TEOREMA 1.45. *(Fórmula de Cartan) Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ se tiene que:*

$$\mathfrak{L}_X\omega = d_R(i_X\omega) + i_X(d_R\omega)$$

2.2. Fibrado de $1/2$-densidades.

DEFINICIÓN 1.46. Dada una variedad M, y $p \in M$ definimos el espacio de las $\frac{1}{2}$-densidades sobre p, o $\mathfrak{M}_p^{1/2}(M)$, como el espacio de las funciones $g : T_pM \to \mathbb{C}$, tal que para todo $g \in \mathfrak{M}_p(M)$:

$$g(A\vec{v}) = [det(A)]^{\frac{1}{2}} g(\vec{v})$$

para todo $\vec{v} \in T_pM$, $A \in GL(n)$ y $n = \dim(M)$.

DEFINICIÓN 1.47. El fibrado de $\frac{1}{2}$-densidades sobre M esta dado por:

- La variedad $\mathfrak{M}^{1/2}(M) := \bigsqcup_{p\in M} \mathfrak{M}_p^{1/2}(M)$.
- La proyección canónica $\Pi : \mathfrak{M}^{1/2}(M) \to M$.

DEFINICIÓN 1.48. Una $\frac{1}{2}$-densidad sobre M es unas seccion sobre el fibrado $\mathfrak{M}^{1/2}(M)$. Éstos campos generan un $\mathbb{C}$-espacio al que denotaremos por $\mathfrak{H}(M)$.

TEOREMA 1.49. *Dada una variedad M, el espácio $\mathfrak{H}(M)$ es un espácio de Hilbert con el producto:*

$$< f, g >= \int_M f\bar{g}.$$

2.3. Variedades simplécticas y variedades de Poisson.

DEFINICIÓN 1.50. Una variedad simpléctica es una tupla (W,ω) donde W es una variedad de dimensión par y ω es una 2-forma cerrada y no degenerada.

DEFINICIÓN 1.51. Dadas dos variedades simplécticas (W,ω) y (W_2,ω_2), llamaremos simplectomorfismos a los difeomorfismos $\varphi : W \to W_2$ tal que $\varphi^*\omega = \omega_2$.

TEOREMA 1.52. *(Darboux) Dada W una variedad compacta de dimensión par y ω una 2-forma sobre W, (W,ω) es una variedad simpléctica si, y sólo si, ω es integrable, es decir, existen cartas $(\vec{q},\vec{p})$ en W tal que:*

$$\omega = d(<\vec{p}, d\vec{q}>).$$

La demostración de éste teorema se puede ver en [**7**]. •

DEFINICIÓN 1.53. Dada una variedad simpléctica (W,ω), llamaremos a las coordenadas $(\vec{q},\vec{p})$ tal que:

$$\omega = d(<\vec{p}, d\vec{q}>),$$

coordenadas canónicas de (W,ω). •

Observe que dada una 2-forma ω no degenerada, se tiene un isomorfismo entre $\varphi : \mathfrak{X}(W) \to \Omega^1(W)$ dado por:

$$\varphi(X) = i_X\omega,$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(W)$.

DEFINICIÓN 1.54. Dada una variedad simpléctica (W,ω) con coordenadas canónicas $(\vec{p},\vec{q})$ y una función $f \in C^\infty(W)$, llamaremos al campo:

$$X_f = (\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}}) = ((\partial_{\vec{p}} f), -(\partial_{\vec{q}} f)),$$

campo simpléctico de f. •

TEOREMA 1.55. *Dada una variedad simpléctica (W,ω) con coordenadas canónicas $(\vec{q},\vec{p})$ y dos funciones $f,g \in C^\infty(W)$ con campos simplécticos X_f, X_g respectivamente, las siguientes condiciones se cumplen:*

(1) $df(X_f) = 0$
(2) $i_{X_f}\omega = df$.
(3) $\omega(X_f, X_g) = \{f,g\} = \sum_i \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}$.
(4) $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$, *siendo* $[-,-]$ *el corchete de Lie usual en* $\mathfrak{X}(W)$. •

Si defnimos las siguientes funciones:

- $\chi : C^\infty(W) \to \mathfrak{X}(W)$ dada por $\chi(f) = X_f$, para todo $f \in C^\infty(W)$,
- $\varphi : \mathfrak{X}(W) \to \Omega^1(W)$ dada por $\varphi(X) = i_X\omega$, para todo $X \in \mathfrak{X}(W)$,

el item (1) del terorema 1.55 indica que:

$$\chi = \varphi^{-1} \circ d.$$

Además si W es compacta, todo campo $X \in \mathfrak{X}(W)$ posee un flujo $F_t^X : W \to W$ tal que:

$$\frac{\partial F_T^X}{\partial t} = X.$$

TEOREMA 1.56. *Dada una variedad simpléctica* (W,ω) *y* $f \in C^\infty$*, el flujo* $F_t : W \to W$ *asociado al campo simpléctico* X_f *es un simplectomorfismo para todo* t*.*

Demostración:
Usando la formula de Cartan:

$$\frac{d}{dt}F_t^*\omega = F_t^*(\mathfrak{L}_{X_f}\omega) = F_t^*\left(d(\underbrace{i_{X_f}\omega}_{df}) + i_{X_f}(\underbrace{d\omega}_{0})\right) = 0.$$

•

DEFINICIÓN 1.57. Dada A un álgebra. Un corchete de Poisson sobre A es una aplicación bilineal $\{-,-\} : A \wedge A \to A$ tal que para todo $a,b,c \in A$:

- Satisfaga Jacobi: $\{\{a,b\},c\} = \{a,\{b,c\}\} - \{b,\{a,c\}\}$,
- Satisfaga Leibnitz: $\{a,b\cdot c\} = \{a,b\}\cdot c + b\cdot\{a,c\}$.

DEFINICIÓN 1.58. Una variedad de Poisson consiste en una variedad M y un corchete de Poisson sobre $C^\infty(M)$.

TEOREMA 1.59. *Toda variedad simpléctica* (M,ω) *tiene una estuctura de variedad de Poisson.*

Demostración:
Tomemos como corchete de poisson al dado por:

$$\{f,g\} := \omega(X_f, X_g),$$

éste corchete satisface las propiedades. •

A pesar del teorema anterior, no toda variedad de Poisson es una variedad simpléctica.

EJEMPLO 1.60. Sea $M = \mathbb{R}^3$, tomamos el corchete:

$$\{f,g\} = \sum_{i<j} a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

éste corchete es un corchete de Poisson, y M no puede ser simpléctica, pues la dimensión de M no es par.

3. Teoría de categorías

En ésta sección seguiremos a [**9**] para formalizar la teoría de categorías.

DEFINICIÓN 1.61. Una categoría $\mathfrak{C}$, consiste de los siguientes datos:

- Una clase de objetos, denotados por $Ob(\mathfrak{C})$.
- Para cada par de objetos, $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$ un conjunto de morfismos denotado por $Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$.
- Para cada triple ordenado, $A, B, C \in Ob(\mathfrak{C})$, existe una operación

$$\circ : Mor_{\mathfrak{C}}(A, B) \times Mor_{\mathfrak{C}}(B, C) \to Mor_{\mathfrak{C}}(A, C).$$

Donde para $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ y $g \in Mor_{\mathfrak{C}}(B, C)$, $f \circ g$ se llama la composición de f con g.

Estos datos están sujetos a los siguientes axiomas:

(1) $\circ$ es asociativo. Es decir para cada cuádruple $A, B, C, D \in Ob(\mathfrak{C})$, $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathfrak{C}}(B, C)$ y $h \in Mor_{\mathfrak{C}}(C, D)$ se tiene que: $f \circ (\vec{\gamma} \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

(2) Para cada objeto $A \in Ob(\mathfrak{C})$ existe un elemento $I_A \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, A)$ tal que para todo $B \in Ob(\mathfrak{C})$, $f \in Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$ y $g \in Mor_{\mathfrak{C}}(B, A)$ se tiene que $I_A \circ f = f$ y $g \circ I_A = g$.

Mientras no haya confusión denotaremos por $Mor(A, B) := Mor_{\mathfrak{C}}(A, B)$.

EJEMPLOS 1.62. :

(1) La categoría $\mathfrak{C} = \mathfrak{G}$, de grupos, está dada por:
   - $Ob(\mathfrak{G}) :=$ La clase de grupos
   - para $G, H \in Ob(\mathfrak{G})$, $Hom(G, H) := \{f : G \to H | f$ es homomorfismo $\}$.

(2) La categoría $\mathfrak{C} = \mathfrak{T}$, de esacios topológicos, está dada por:
   - $Ob(\mathfrak{T}) :=$ La clase de los espacios topológicos.
   - para $G, H \in Ob(\mathfrak{T})$, $Hom(G, H) := \{f : g \to H | f$ es continua $\}$.

(3) La categoría $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}$, de variedades, está dada por:
   - $Ob(\mathfrak{M}) :=$ La clase de las variedades suaves.
   - para $G, H \in Ob(\mathfrak{M})$, $Hom(G, H) := \{f : g \to H | f$ es suave $\}$.

(4) La categoría $\mathfrak{C} = \mathfrak{V}(\mathbb{K})$, de espacios vectoriales, está dada por:
   - $Ob(\mathfrak{V}(\mathbb{K})) :=$ La clase de los espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

- para $G, H \in Ob(\mathfrak{V}(\mathbb{K}))$, $Hom(G,H) := \{f : g \to H | f$ es $\mathbb{K}$-lineal $\}$.

(5) La categoría $\mathfrak{C} = S\mathfrak{M}$, de variedades simplécticas, está dada por:
- $Ob(S\mathfrak{M}) :=$ La clase de las variedades simplécticas.
- para $G, H \in Ob(S\mathfrak{M})$, $Hom(G,H) := \{f : g \to H | f$ es un simplectomorfismo $\}$.

(6) La categoría $\mathfrak{C} = P\mathfrak{M}$, de las variedades de Poisson, está dada por:
- $Ob(P\mathfrak{M}) :=$ La clase de las variedades de Poisson.
- para $G, H \in Ob(P\mathfrak{M})$, $Hom(G,H) := \{f : g \to H | f$ es un morfismo de Poisson $\}$.

(7) La categoría $\mathfrak{C} = \mathfrak{H}$, de espacios de Hilbert, está dada por:
- $Ob(\mathfrak{H}) :=$ La clase de los espacios de Hilbert.
- para $G, H \in Ob(\mathfrak{H})$, $Hom(G,H) := \{f : g \to H | f$ es ortogonal $\}$.

DEFINICIÓN 1.63. Sean $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ dos categorías, definimos la categoría producto por:

- $Ob(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) = Ob(\mathfrak{C}_1) \times Ob(\mathfrak{C}_2)$.
- $Hom_{\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2}(A_1 \times A_2, B_1 \times B_2) = Hom_{\mathfrak{C}_1}(A_1, B_1) \times Hom_{\mathfrak{C}_2}(A_2, B_2)$.

DEFINICIÓN 1.64. Dadas dos categorías $\mathfrak{C}_1$ $\mathfrak{C}_2$. Un funtor $F : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_2$, consiste en los siguientes datos:

- Una aplicación $F : Ob(\mathfrak{C}_1) \to Ob(\mathfrak{C}_2)$.
- Una aplicación $F : Mor(\mathfrak{C}_1) \to Mor(\mathfrak{C}_2)$ tal que, para $f \in Mor_{\mathfrak{C}_1}(A,B)$ tenemos que $F(f) \in Mor_{\mathfrak{C}_2}(F(A), F(B))$.

Sujetos a los siguientes axiomas:

(1) F preserva la composición. Es decir, si $A, B, C \in Ob(\mathfrak{C}_1)$ $f \in Mor_{\mathfrak{C}_1}(A,B)$ y $g \in Mor_{\mathfrak{C}_1}(B,C)$ entonces $F(f \circ_{\mathfrak{C}_1} g) = F(f) \circ_{\mathfrak{C}_2} F(g)$.

(2) F preserva identidades. Es decir, para todo $A \in Ob(\mathfrak{C}_1)$ tenemos: $F(I_A) = I_{F(A)}$.

EJEMPLOS 1.65. :

(1) El funtor identidad $I : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, dado por:
- Para $A \in Ob(\mathfrak{C})$, $I(A) := A$.
- Para todo $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$, para $f \in Hom(A,B)$, $I(f) := f$.

(2) El funtor forget puede ir de $F : S\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$:
- Para $(\Omega, \omega) \in Ob(S\mathfrak{M})$, $F((\Omega, \omega)) := \Omega$.

- Para todo $M, N \in Ob(S\mathfrak{M})$, para $f \in Hom(M,N)$, $F(f) := f$.

Sin embargo se pueden definir funtores forget de $S\mathfrak{M} \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{T}$, $P\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $\mathfrak{H} \to \mathfrak{V} \to \mathfrak{G}$.

(3) Sea $F : S\mathfrak{M} \to P\mathfrak{M}$ dado por:
- Para $(\Omega, \omega) \in Ob(S\mathfrak{M})$, $F((\Omega, \omega)) := (\Omega, \{,\}_\omega)$.
- Para todo $M, N \in Ob(S\mathfrak{M})$, para $f \in Hom(M,N)$, $F(f) := f$.

DEFINICIÓN 1.66. Dadas $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ categorías y $F : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_2$, $G : \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{C}_3$ funtores, definimos su composición $G \circ F : \mathfrak{C}_1 \to \mathfrak{C}_3$ dado por:

- Para $A \in \mathfrak{C}_1$, $G \circ F(A) := G(F(A))$.
- Para todo $M, N \in Ob(\mathfrak{C}_1)$ y $f \in Hom(M,N)$, $G \circ F(f) := G(F(f))$.

DEFINICIÓN 1.67. Sean $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ categorias. Un bifuntor $F : \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \to \mathfrak{C}_3$ es un funtor en la categoría producto.

DEFINICIÓN 1.68. Una categoría simétrica monoidal consiste en una septupla $(\mathfrak{C}, \odot, 1_{\mathbb{C}}, \alpha, \gamma, \beta, \sigma)$, donde:

- $\mathfrak{C}$ es una categoría.
- $\odot : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ es un bifuntor.
- $1_{\mathfrak{C}} \in \mathfrak{C}$.
- Para cada $A, B, C \in Ob(\mathfrak{C})$ $\alpha_{A,B,C} : A \odot (B \odot C) \longleftrightarrow (A \odot B) \odot C$ es un isomorfismo llamado asociador.
- Para cada $A \in Ob(\mathfrak{C})$, $\gamma : 1_{\mathfrak{C}} \odot A \longleftrightarrow A$ y $\beta A \odot 1_{\mathfrak{C}} \longleftrightarrow A$ son isomorfismos.
- Para $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$ $\sigma_{A,B} : A \odot B \longleftrightarrow B \odot A$ es un isomorfismo.

Estos datos están sujetos a los siguientes axiomas:

(1) Asociatividad: Para $A, B, C, D \in Ob(\mathfrak{C})$ se tiene que:

$$(\alpha_{A,B,C} \otimes I_D) \circ \alpha_{A,B \odot C,D} \circ (I_A \odot \alpha_{B,C,D}) = \alpha_{A \odot B,C,D} \odot \alpha A, B, C \odot D.$$

Esto es equivalente al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A\odot(B\odot(C\odot D)) \arrow[dl, "I_A\odot\alpha_{B,C,D}"'] \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C\odot D}"] & \\
A\odot((B\odot C)\odot D) \arrow[d, "\alpha_{A,B\odot C,D}"'] & & (A\odot B)\odot(C\odot D) \arrow[d, "\alpha_{A\odot B,C,D}"] \\
(A\odot(B\odot C))\odot D \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C}\odot I_D"] & & ((A\odot B)\odot C)\odot D
\end{tikzcd}$$

llamado pentágono de Mc Lane.

(2) Unidad: Para cada $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$:

$$I_A \odot \gamma = (\beta \odot I_B) \circ \alpha_{A,1_{\mathfrak{C}},B}.$$

Esto es equivalente al diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A\odot(1_{\mathfrak{C}}\odot B) \arrow[rr, "\alpha_{A,1_{\mathfrak{C}},B}"] \arrow[dr, "I_A\odot\gamma"'] & & (A\odot 1_{\mathfrak{C}})\odot B \arrow[dl, "\beta\odot I_B"] \\
 & A\odot B &
\end{tikzcd}$$

(3) Simetrizador: Para $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$, se tiene que:

$$\sigma_{A,B} \circ \sigma_{B,A} = I_{A\odot B} \quad y \quad \sigma_{B,A} \circ \sigma_{A,B} = I_{B\odot A}.$$

(4) Conmutatividad: Para $A, B, C \in Ob(\mathfrak{C})$ se tiene que:

$$(\sigma_{A,C} \odot I_B) \circ \alpha_{A,C,B} \circ (I_A \odot \sigma_{B,C}) = \alpha_{C,A,B} \circ \sigma_{A\odot B,C} \circ \alpha_{A,B,C}.$$

Que es equivalente al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A\odot(B\odot C) \arrow[dl, "I_A\odot\sigma_{B,C}"'] \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C}"] & \\
A\odot(C\odot B) \arrow[d, "\alpha_{A,C,B}"'] & & (A\odot B)\odot C \arrow[d, "\sigma_{A\odot B,C}"] \\
(A\odot C)\odot B \arrow[dr, "\sigma_{A,C}\odot I_B"'] & & C\odot(A\odot B) \arrow[dl, "\alpha_{C,A,B}"] \\
 & (C\odot A)\odot B &
\end{tikzcd}$$

llamado hexágono de MC Lane.

En caso de que no haya confusión tomaremos como una categoría simétrica monoidal a la tupla $(\mathfrak{C}, \odot)$.

EJEMPLO 1.69. La categoría $\mathfrak{T}$ de espacios topológicos junto con: $\odot := \times$ el producto cartesiano de espacios topológicos, $1 := *$ el conjunto de un sólo punto con la topología discreta y $\sigma_{A,B} : A \times B \to B \times A$ dado por $\sigma_{A,B}(a,b) = (b,a)$, es una categoría simétrica monoidal.

EJEMPLO 1.70. La categoría $\mathfrak{V}(\mathbb{K})$ de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales junto con $\odot := \otimes$ el producto tensorial, $1 := \mathbb{K}$ y $\sigma_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$ dado por $\sigma_{A,B}(a \otimes b) = (b \otimes a)$, es una categoría simétrica monoidal.

DEFINICIÓN 1.71. Dadas $(\mathfrak{C}, \odot, 1_{\mathfrak{C}}, \alpha, \gamma, \beta, \sigma)$ y $(\mathfrak{D}, \otimes, 1_{\mathfrak{D}}, \alpha_{\mathfrak{D}}, \gamma_{\mathfrak{D}}, \beta_{\mathfrak{D}}, \sigma_{\mathfrak{D}})$ dos categorías simétricas monoidales, un funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ simétrico monoidal es un triplete (F, φ, φ_1) donde:

- $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es un funtor.
- Para cada $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$ se tiene que:

$$\varphi_{A,B} F(A) \otimes F(B) \longleftrightarrow F(A \odot B)$$

  es un isomorfismo.
- Y $\varphi_1 : 1_{\mathfrak{D}} \longleftrightarrow F(1_{\mathfrak{C}})$ es un isomorfismo.

Estos datos están sujetos a los siguientes axiomas:

(1) Para $A, B, C \in Ob(\mathfrak{C})$ se satisface el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & F(A) \otimes (F(B) \otimes F(C)) \arrow[dl, "\alpha_{\mathfrak{D} F(A),F(B),F(C)}"'] \arrow[dr, "I_{F(A)} \otimes \varphi_{B,C}"] & \\
(F(A) \otimes F(B)) \otimes F(C) \arrow[d, "\varphi_{A,B} \otimes I_{F(C)}"'] & & F(A) \otimes F(B \odot C) \arrow[d, "\varphi_{A,B \odot C}"] \\
F(A \odot B) \otimes F(C) \arrow[dr, "\varphi_{A \odot B,C}"'] & & F(A \odot (B \odot C)) \arrow[dl, "F(\alpha_{A,B,C})"] \\
 & F((A \odot B) \odot C) &
\end{tikzcd}$$

(2) Para $A \in Ob(\mathfrak{C})$ se satisfacen los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} F(A)\otimes 1_{\mathfrak{D}} \arrow[r, "I_{F(A)}\otimes\varphi_1"] \arrow[d, "\beta_{\mathfrak{D}}"] & F(A)\otimes F(1_{\mathfrak{C}}) \arrow[d, "\varphi_{A,1_{\mathfrak{C}}}"] \\ F(A) & F(A\odot 1_{\mathfrak{C}}) \arrow[l, "F(\beta)"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1_{\mathfrak{D}}\otimes F(A) \arrow[r, "\varphi_1\otimes I_{F(A)}"] \arrow[d, "\gamma_{\mathfrak{D}}"] & F(1_{\mathfrak{C}})\otimes F(A) \arrow[d, "\varphi_{1_{\mathfrak{C}},A}"] \\ F(A) & F(1_{\mathfrak{C}}\odot A) \arrow[l, "F(\gamma)"] \end{tikzcd}$$

(3) Para todo $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$ se satisface el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} F(A)\otimes F(B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "\sigma_{\mathfrak{D}F(A),F(B)}"'] & F(A\odot B) \arrow[d, "F(\sigma_{A,B})"] \\ F(B)\otimes F(A) \arrow[r, "\varphi_{B,A}"] & F(B\odot A) \end{tikzcd}$$

4. Operads

En ésta sección seguiremos a [**29**] para formalizar la teoría de Operads, sin embargo también citaremos a [**17**], [**20**], [**23**] y [**30**].

DEFINICIÓN 1.72. Un operad en una categoría simétrica monoidal $(\mathfrak{C},\odot)$, consiste en una sucesión de espacios $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathfrak{C}$, junto con las siguientes aplicaciones:

- Para cada $n\in\mathbb{N}$ una acción de S_n sobre $P(n)$.
- Un morfismo unidad $\eta:\mathbb{K}\to P(1)$ (siendo $\mathbb{K}$ la unidad de $\mathfrak{C}$).
- Dado n, para cada $\pi=(k_1,\dots k_n)\in\mathbb{N}^n$ se tiene una aplicación:

$$\gamma_\pi : P(n)\odot P(k_1)\odot\cdots\odot P(k_n)\to P(k_1+\cdots+k_n)$$

tal que γ verifique las siguientes condiciones:

- Asociatividad: Denotando $K=\sum_{s=1}^n k_s$, $g_0=1$, $g_s=\sum_{i=1}^s k_i$, $H_s=\sum_{j=g_{s-1}}^{g_s} h_j$. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\left(P(n)\odot\left(\bigodot_{s=1}^{n}P(k_s)\right)\right)\odot\left(\bigodot_{j=1}^{K}P(h_j)\right) \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[d, "\gamma_{(k_1,\dots,k_n)}\odot Id"] & & P(n)\odot\left(\bigodot_{s=1}^{n}P(k_s)\odot\left(\bigodot_{j=g_{s-1}}^{g_s}P(h_j)\right)\right) \arrow[d, "id\odot\gamma_{(h_i^1)_{i=1}^{k_1}}\odot\cdots\odot\gamma_{(h_i^n)_{i=1}^{k_n}}"] \\
P(K)\odot\left(\bigodot_{j=1}^{K}P(h_j)\right) \arrow[dr, "\gamma_{((h_i^1)_{i=1}^{k_1},\dots,(h_i^n)_{i=1}^{k_n})}"'] & & P(n)\odot\left(\bigodot_{s=1}^{n}P(H_s)\right) \arrow[dl, "\gamma_{(\Sigma_{i=1}^{k_1}h_i^1,\dots,\Sigma_{i=1}^{k_n}h_i^n)}"] \\
& P\left(\Sigma_{s=1}^{n}H_s\right) &
\end{tikzcd}$$

- Equivarianza (que permute bajo la acción de S_n): Denotando $K=\sum_{s=1}^{n}k_s$, $\sigma\in S_n$ y $\sigma(k_1,\dots,k_n)\in S_K$ la permitación de los bloques formados por los k_i elementos, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
P(n)\odot\left(\bigodot_{s=1}^{n}P(k_s)\right) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\gamma"] & P(n)\odot\left(\bigodot_{s=1}^{n}P(k_{\sigma(s)})\right) \arrow[d, "\gamma"] \\
P(K) \arrow[r, "\sigma(k_1,\dots,k_n)"] & P(K)
\end{tikzcd}.$$

Y tomando $\tau_i\in S_{k_i}$:

$$\begin{tikzcd}
P(n)\odot\left(\bigodot_{s=1}^{n}P(k_s)\right) \arrow[r, "Id\odot\tau_1\odot\cdots\odot\tau_n"] \arrow[d, "\gamma"] & P(n)\odot\left(\bigodot_{s=1}^{n}P(k_s)\right) \arrow[d, "\gamma"] \\
P(K) \arrow[r, "\tau_1\oplus\cdots\oplus\tau_n"] & P(K)
\end{tikzcd}.$$

- η es unidad de γ, es decir los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
P(n)\otimes(\mathbb{K})^n \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "Id\odot\eta^n"] & P(n) \\
P(n)\otimes(P(1))^n \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}\odot P(n) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\eta\odot Id"] & P(n) \\
P(1)\odot P(n) \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

EJEMPLO 1.73. Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, tenemos que los datos:

- $P(n)=\langle S_n\rangle_{\mathbb{K}}$ (El $\mathbb{K}$-espácio generado por los elementos de S_n).
- $\eta=1_{<S_1>_{\mathbb{K}}}:\mathbb{K}\to P(1)$.
- La acción canónica de S_n sobre $\langle S_n\rangle_{\mathbb{K}}$.
- Para $\sigma_n\in S_n$, $\sigma_{k_1}\in S_{k_1}$, ... , $\sigma_{k_n}\in S_{k_n}$:

$$\gamma(\sigma_n\otimes\sigma_{k_1}\otimes\cdots\otimes\sigma_{k_n})=\sigma_n(\sigma_{k_1}\times\cdots\times\sigma_{k_n})$$

.

conforman un operad en la categoría $Mod_{\mathbb{K}}$.

DEFINICIÓN 1.74. Al operad dado en el ejemplo 1.73 le llamaremos el operad asociativo de $\mathbb{K}$ y le denotaremos por $Ass_{\mathbb{K}}$.

EJEMPLO 1.75. Dado un cuerpo $\mathbb{K}$ y un $\mathbb{K}$-espacio V, tenemos que los datos:

- $P(n) = Mor(V^{\otimes n}, V)$.
- $\eta : K \to P(1) = Mor(V,V)$ definida para $k \in \mathbb{K}$ como $\eta(k)(v) = k \cdot v$ para $v \in V$.
- $\sigma_n \cdot f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v_{\sigma_n 1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma_n n})$.
- $\gamma(f_n \otimes f_{k_1} \otimes \cdots \otimes f_{k_n}) = f_n(f_{k_1} \otimes \cdots \otimes f_{k_n})$.

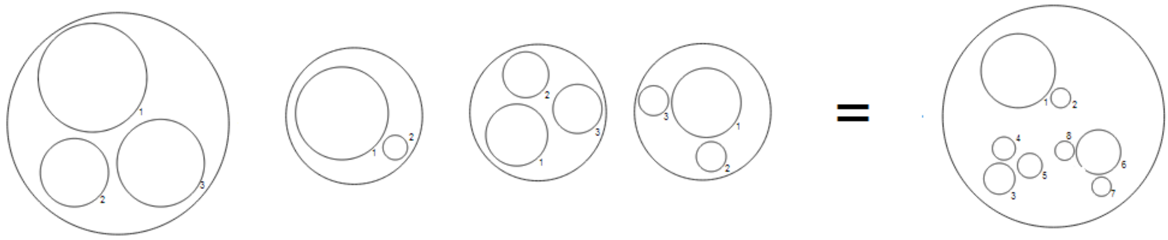
conforman un operad en la categoría $Mod_{\mathbb{K}}$.

DEFINICIÓN 1.76. Al operad dado en el ejemplo 1.75 le llamaremos el operad de endormorfismos de V y le denotaremos por $End(V)$.

EJEMPLO 1.77. Sea $B^d = \{x \in \mathbb{R}^d \backslash ||x|| < 1\}$ el disco unitario de dimensión d. Consideremos los siguientes datos:

- Si $n > 1$, $C_d(n) = \{(B_1, \ldots, B_n)$ discos contenidos en $B^d \backslash B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i, j\}$
  y $C_d(1) = \{*\}$ un punto.
  Cada configuración de $C_d(n)$ se le puede asignar un punto de $(B^d)^n \times (0,1)^n$, donde las primeras coordenadas designan el centro de los discos y las últimas los radios correspondientes. De ésta manera $C_d(n)$ se puede considerar como un subconjunto de $(B^d)^n \times (0,1)^n$ y dotarlo de una topología. En éste caso tomaremos $C_d(1) = \{0 \times 1\}$ por cuestiones de simplicidad.

- $\eta : id$.
- La acción de S_n está dada por la permutación en la numeración de los discos.
- La función $\gamma : P(n) \times P(k_1) \times \cdots \times P(k_n)$ consiste en "meter" los discos con k_i discos, en el disco con n discos, de manera ordenada, como se muestra en la figura:



Que utilizando éste espacio como $(B^d)^n \times (0,1)^n$ y tomando $1 \leq i \leq n$ podemos escribir:

$$\gamma(x_i \times r_i, y_{j_i} \times r_{j_i}) = (x_i + r_i y_{j_i} \times r_i r_{j_i}).$$

Éstos datos conforman un operad en la categoría Top.

DEFINICIÓN 1.78. Al operad dado en el ejemplo 1.77 le llamaremos el operad de los discos en d y le denotaremos por C_d.

DEFINICIÓN 1.79. Dados dos operads $(P(n), \gamma^P, \eta^P)$ y $(O(n), \gamma^O, \eta^O)$ en una misma categoría simétrica monoidal $\mathfrak{C}$, un morfismo de operads es una sucesión de morfismos en $\mathfrak{C}$, $\varphi_n : P(n) \to O(n)$ tal que, éstos satisfacen las siguientes condiciones:

- Compatibilidad con la unidad:

$$\varphi_1(\eta^P) = \eta^O.$$

- Compatibilidad con la acción simétrica:

$$\varphi_n(\sigma_n \cdot p_n) = \sigma_n \cdot \varphi_n(p_n),$$

  para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n \in S_n$ y $p_n \in P(n)$.
- Compatibilidad con γ:

$$\varphi_{k_1+\cdots+k_n}(\gamma^P_{(k_1,\ldots,k_n)}) = \gamma^O_{(k_1,\ldots,k_n)}(\varphi_n \odot \varphi_{k_1} \odot \cdots \odot \varphi_{k_n}),$$

  para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$.

DEFINICIÓN 1.80. Dado un Operad P, y un $\mathbb{K}$-espácio V. Una P-álgebra sobre V constituye en un morfismo de operads entre P y $End(V)$.

EJEMPLO 1.81. Dado un espacio topológico X y un punto fijo $p \in X$ y $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica cero. Definimos, $\Omega_1(X,p) = \langle \{f : [-1,1] \to X \backslash f(-1) = f(1) = p\} \rangle_{\mathbb{K}}$.
Sobre $\Omega_1(X,p)$ podemos definir una C_1-álgebra con el morfismo de operads $\varphi : C_1 \to End(\Omega(X,p))$ dado por:

$$\gamma((x_i, r_i), f_i)(x) = \begin{cases} f_i(\frac{x - x_i}{r_i}) & si \quad x - x_i \leq r_i \\ p & si \quad no \end{cases}$$

Éste tipo de álgebra posee una estructura de A_∞-álgebra, o de un álgebra asociativa por Homotopías. En éste trabajo no entraremos en detalle sobre éstas álgebras, sin embargo, si el lector está interesado puede revisar [**23**] y [**29**].

TEOREMA 1.82. *Dado V un $\mathbb{K}$-espacio. Toda $Ass_{\mathbb{K}}$-álgebra sobre V es un álgebra asociativa sobre la estructura de espacio en V*

Demostración:
Sea $\varphi : Ass_{\mathbb{K}} \to End(V)$ una $Ass_{\mathbb{K}}$-álgebra, denotaremos $m := \varphi(1,2) \in End(V \otimes V, V)$. Observe que φ debe cumplir lo siguiente:

- Para todo $k \in \mathbb{K}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\eta^{Ass_{\mathbb{K}}}(k)) &= \eta^{End(V)}(k), \\ \varphi_1(k(1)) &= kId_V \end{aligned}$$

  por lo tanto $\varphi_1((1)) = Id_V$.

- $$\varphi_2((2,1))(a,b) = (2,1)\varphi_2((1,2))(a,b) = (2,1) \cdot m(a,b) = m(b,a).$$

  Además para todo $\sigma_n \in S_n$ se tiene que:

$$\varphi_n(\sigma_n) = \sigma_n \varphi_n(\iota_n),$$

  siendo ι_n la permutación identidad en S_n.

- Luego se sigue:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_3(\gamma((1,2)\otimes(1,2)\otimes(1))) & =\varphi_3((1,2,3))= & \varphi_3(\gamma((1,2)\otimes(1)\otimes(1,2))) \\ \gamma(\varphi_2(1,2)\otimes\varphi_2(1,2)\otimes\varphi_1(1)) & = & \gamma(\varphi_2(1,2)\otimes\varphi_1(1)\otimes\varphi_2(1,2)) \\ \gamma(m\otimes m\otimes Id_V) & = & \gamma(m\otimes Id_V\otimes m) \\ m(m\otimes Id_V) & = & m(Id_V\otimes m) \end{array}$$

Es decir, m cumple la asociatividad. Y además se induce que los demás valores de φ quedan completamente determinados por m. En conclusión (V,m) es un álgebra asociativa. •

DEFINICIÓN 1.83. Dado un espácio topológico X, el complejo de cadenas de X, $Chains^\bullet(X)$ está dado por:

- $Chains^\bullet(X)_k = \left\langle \sum_{i=1}^n n_i f_i \quad : n_i \in \mathbb{Z} \quad , n \in \mathbb{N} \quad , f_i : [0,1]^k \to X \right\rangle$.
  Junto con la relación:
  - $f\circ\sigma = |\sigma| f$ para toda permutación σ.
  - $f\circ Pr_{k-1} = 0$ donde $Pr_{k-1} : [0,1]^k \to [0,1]^{k-1}$ es la proyección.
- El diferencial está dado por: definen el diferencial en $Chains^\bullet(X)$ dado por:

  $$d_C(f) = \sum_{i=1}^k (-1)^i D_i f - U_i f,$$

  donde:

  $$D_i f(x_1,\dots,x_{k-1}) = f(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_i\dots,x_{k-1}),$$

  $$U_i f(x_1,\dots,x_{k-1}) = f(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_i\dots,x_{k-1}),$$

  para todo $f\in Chains^\bullet(X)_k$.

OBSERVACIÓN 1.84. Si tomamos una variedad X de dimensión d entonces la propiedad de $f\circ Pr_{k-1} = 0$ implica que:

$$Chains^\bullet(X)_{-k} = \left\langle \sum_{i=1}^n n_i f_i \quad : n_i \in \mathbb{Z} \quad , n \in \mathbb{N} \quad , f_i : [0,1]^k \to X \right\rangle = 0$$

si $k > d$.

Dada una familia de espácios topológicos $\{X_i\}_{1\leq i\geq k}$, existe un morfismo de módulos:

$$\lambda : \otimes_{i=1}^{k}(Chains^{\bullet}(X_i)) \to Chains^{\bullet}(\Pi_{i=1}^{k} X_i)$$

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_k \to f_1 \times \cdots \times f_k$$

DEFINICIÓN 1.85. Dado un operads topológico $(P(n), \gamma, \eta)$ un dg-Operad de cadenas consiste en el operad sobre la categoría de los módulos diferenciales graduados, dado por:

(1) $Chains(P)(n) = (Chains^{\bullet}(P(n)), d_C)$.
(2) La acción extendida de γ por λ, es decir $\gamma_{Chains} = \gamma \circ \lambda$.

Utilizando ésta definición podemos asignarle al operad C_d un complejo y calcularle su homología. De ésta manera se puede probar que la homología de las álgebras A_∞ o C_1-álgebras, son álgebras asociativas. Y más aún, en el siguiente capítulo afirmaos que la homología de las C_2-álgebras son álgebras de Gerstenhaber.

Capítulo 2

Teorema de Kontsevich

En éste capítulo veremos relaciones entre la teoría de deformación, las variedades de Poisson y los operads, además enunciaremos y mostraremos un esbozo de la demsotración del teorema de Kontsevich. Empezaremos por introducir éste teorema. Fijemos M como una variedad y denotemos $A_M := C^\infty(M)$. Dada una deformación de A_M generada por:

$$m = m_0 + m_1 t + \sum_{n\geq 2} m_n t^n,$$

la asociatividad de m induce que el siguiente operador bilineal simétrico:

$$\{f,g\} := \lim_{t->0} \frac{m(f,g) - m(g,f)}{t} = m_1(f,g) - m_1(g,f),$$

que satisface Jacobi y Leibniz. De ésto se deduce que toda deformación genera un corchete de Poisson.

Por otro lado, existen corchetes de Poisson que generan deformaciones:

DEFINICIÓN 2.1. Dada $(M, \{-,-\})$ una variedad de Poisson. Un producto estrella sobre A_M es una aplicación bilineal $*_t : A_M \times A_M \to A_M[[t]]$:

$$f *_t g = \sum_{k\geq 0} t^k C_k(f,g),$$

tal que:

- C_k es un operador bidiferencial en A_M.
- $*_t$ es asociativa.
- $C_0(f,g) = f\cdot g$ y $C_1(f,g) - C_1(g,f) = \{f,g\}$.
- $1 *_t f = f *_t 1 = f$.

Observe que todo producto estrella es una deformación del producto usual en A_M. Y la condición $C_1(f,g) - C_1(g,f) = \{f,g\}$ es equivalente a:

$$[f,g] = f *_t g - g *_t h = t\{f,g\} + O(\hbar^2),$$

por lo tanto el producto estrella genera $[-,-]/t$ que es una deformación de $(A_M, \{-,-\})$ como álgebra de Lie.

En otras palabras, el producto estrella $*_t$ es una deformación de A_M, cuya deformación natural de álgebra de Lie, dada en 1.9, es una deformación del corchete de poisson $\{-,-\}$.

EJEMPLO 2.2. (Producto Moyal)

- Si $M = \mathbb{R}^2$, para el corchete de Poisson:

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1} \quad ,$$

  Se tiene el siguiente producto estrella:

$$f *_t g = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^n}\frac{\partial^n g}{\partial x_2^n}\frac{t^n}{n!} \quad .$$

- De manera más general, tomando a $M = \mathbb{R}^n$, para el corchete de Poisson:

$$\{f,g\} = \sum_{i<j} a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

  Se tiene el producto estrella:

$$f *_t g = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i_1 j_1 \dots i_k j_k} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_k j_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \frac{\partial^k g}{\partial x_{j_1} \partial x j_k} \frac{t^n}{n!} \quad .$$

  En éste caso se pueden tomar diferentes productos estrella, pero todos son equivalentes en el sentido de deformaciones.

DEFINICIÓN 2.3. Una deformación m de A_M se llama diferencial si los elementos m_i que conforman la deformación, con $i > 1$, son operadores bidiferenciales.

TEOREMA 2.4. *(Teorema de Kontsevich) Dada una variedad M, existe un quasi isomorfismo entre:*

$$\varphi : Pois(M) \to Star(C^\infty(M)).$$

Siendo $Pois(M)$ el espácio de todos los corchetes de poisson sobre $C^\infty(M)$ y $Star(C^\infty(M))$ las deformaciones diferenciales de $C^\infty(M)$

Con respecto a la demostración de éste teorema debemos tomar en cuenta lo siguiente:

- Como se requiere que los elementos de la deformación sean operadores bidiferenciables, no se utilizará el complejo de Hochschild completo, si no, el subcomplejo de operadores multidiferenciales denotado por $MODif(A)$ el cual veremos más adelante.
- El teorema de Hochschild-Konstant-Rosenberg indica un isomorfismo entre $Pois(M)$ y la homología de $MODif(A)$.
- El teorema de Kontsevich-Tamarkin dice que existe una función entre la homología y el complejo de Hochschild, que induce un isomorfismo en la Homología.

A continuación mostraremos con más detalle los teoremas de Hochschild-Konstant-Rosenberg y de Kontsevich-Tamarkin.

1. Teorema de Hochschild-Konstant-Rosenberg

1.1. Operadores Multidiferenciales.

En ésta sección seguiremos a [**14**] y [**27**], para mostrar la estructura de los operadores multidiferenciales. Además se tomara a $\mathbb{K}$ como un cuerpo de característica cero, A cómo una $\mathbb{K}$-álgebra y $(C^\bullet(A), d_H)$ como su complejo de Hochschild.

DEFINICIÓN 2.5. Sea $D : A \to A$ un morfismo de $\mathbb{K}$-espacios. Diremos que D es una derivación si, y sólo si, cumple con la siguiente ecuación:

$$D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b),$$

Llamada ecuación de Leibniz. Al conjunto de derivaciones de A lo denotaremos $Der(A)$.

EJEMPLO 2.6. Dado $A = C^\infty(\mathbb{R})$, $Der(A)$ es el $\mathbb{R}$-espacio generado por el operador lineal $D(f) = f'$.

EJEMPLO 2.7. Dada una variedad M de dimensión n, $A = A_M$ y $v \in \mathbb{R}^n$. Tenemos que:

$$D_v(f) = \langle v, \partial_{\vec{x}} f \rangle ,$$

es una derivación en A_M. Luego veremos que $Der(A_M) \simeq \mathfrak{X}(M)$.

PROPOSICIÓN 2.8. *Si* $1 \in A$ *es la unidad de* A*, entonces para todo* $D \in Der(A)$ *se tiene que* $D(1) = 0$ *y por tanto para todo* $k \in \mathbb{K}$ *se tiene que* $D(k) = D(k1) = 0$.

PROPOSICIÓN 2.9. *Las derivaciones de* A *son los elementos del kernel de* d_H *que tienen grado cero, es decir* $Der(A) = Ker(d_H) \cap C(A)_1$.

Demostracíon: Sea $D \in C(A)_1$, $D \in Ker(d_H)$ si, y sólo si:

$$d_H(D)(a_0, a_1) = a_0 D(a_1) + D(a_0)a_1 - D(a_0 a_1) = 0$$

por lo que $D \in Ker(d)$ si, y sólo si, $D \in Der(A)$. •

OBSERVACIÓN 2.10. Cómo $Der(A) = Ker(d_H) \cap C(A)_1$ entonces $Der(A)$ es un subespácio de $Ker(d_H)$ y de $C^\bullet(A)$.

DEFINICIÓN 2.11. Definiremos al producto cup sobre $C^\bullet(A)$ como la operación binaria $\cup : C(A)_i \times C(A)_j \to C(A)_{i+j}$ dada por:

$$f \cup g = (-1)^{(\bar{f})(\bar{g})} m(f \otimes g).$$

TEOREMA 2.12. *Dada* A *una* K*-álgebra y sea* $C^\bullet(A)$ *su complejo de Hochschild. Entonces* $(C^\bullet(A), \cup, d_H)$ *es un álgebra diferencial graduada.*

Demostración:

Note que en éste caso el grado de $f \in C(A)_i$ es i y no $i-1$.

- La asociatividad de $\cup$ se sigue de la asociatividad de A.
- Hay que ver si el diferencial de Hochshild d_H es una derivación con respecto a $\cup$:
  Sea $f \in C(A)_n$ y $g \in C(A)_m$:

$$\begin{aligned}
& d_H(f \cup g)(a_0, \ldots, a_{m+n}) = \\
= \quad & a_0 f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) g(a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m}) + \\
& +(-1)^{m+n+1} f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) g(a_n \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1}) a_{n+m} + \\
& + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) g(a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m}) + \\
& + \sum_{i=n}^{m+n} (-1)^{i+1} f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) g(a_n \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m}) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \ & \left(a_0 f(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)+\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f(a_0\otimes\cdots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_n)\right) g(a_{n+1}\otimes\cdots\otimes a_{n+m})+\\
& +(-1)^{n+2} f(a_0\otimes\cdots\otimes a_{n-1})a_n g(a_{n+1}\otimes\cdots\otimes a_{n+m})+\\
& +(-1)^{n+1} f(a_0\otimes\cdots\otimes a_{n-1})a_n g(a_{n+1}\otimes\cdots\otimes a_{n+m})+\\
& +(-1)^{n+1} f(a_0\otimes\cdots\otimes a_{n-1})\cdot\\
& \qquad \cdot\left(\sum_{i=0}^{m}(-1)^{i+1} g(a_n\otimes\cdots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_{n+m})+(-1)^m g(a_n\otimes\cdots\otimes a_{n+m-1})a_{n+m}\right)\\
= \ & \big(((d_H f)\cup g)+(-1)^m(f\cup(d_H g))\big)(a_0\otimes\cdots\otimes a_{m+n}).
\end{aligned}
$$

y con ésto queda demostrado. •

DEFINICIÓN 2.13. Definiremos al álgebra de multiderivaciones de A cómo la subálgebra de $(C^\bullet(A),\cup)$ generada por $Der(A)$, y será denotada por $MDer(A)$.

OBSERVACIÓN 2.14. $MDer(A)$ es una subálgebra graduada de $C^\bullet(A)$:

$$MDer(A)=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} MDer^n(A),$$

dónde $MDer^n(A)=MDer(A)\cap C(A)_n$.

EJEMPLO 2.15. Tomando $A:=C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $v,w\in\mathbb{R}^n$. Se tiene que $D_v\cup D_w$ dado por:

$$D_v\cup D_w(f,g)=< v,\partial_{\vec{x}} f>\cdot< w,\partial_{\vec{x}} g>,$$

para todo $f,g\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, es una multiderivación de A.

TEOREMA 2.16. *Dada A una $\mathbb{K}$-álgebra y $(C^\bullet(A),d_H)$ su complejo de Hochshild se tiene que $MDer(A)$ es un subespacio de $Ker(d_H)$.*

Demostración:

Por lo visto anteriormente $MDer^1(A)=Der(A)\subset Ker(d_H)$. Supongamos por inducción que $MDer^k(A)\subset Ker(d_H)$ para todo $k<n$.

Luego, sea $\Delta \in MDer^n(A)$. Por la definición de $MDer(A)$ se tiene que Δ se puede escribir como:

$$\Delta = \sum_i \alpha_i D_i \cup \delta_i,$$

dónde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $D_i \in Der(A)$ y $\delta \in MDer^k(A)$.

Además se tiene que:

$$d_H(D_i \cup \delta_i) = d_H(D_i) \cup \delta_i - D_i \cup d_H(\delta_i) = 0,$$

por lo tanto, se concluye que:

$$d_H(\Delta) = 0,$$

y $\Delta \in Ker(d_H)$. •

DEFINICIÓN 2.17. Definiremos al espácio de operadores diferenciales de A como el espácio generado por combinaciones lineales de elementos de la forma:

$$D_1 \circ \cdots \circ D_k,$$

dónde $D_1, \ldots, D_k \in Der(A)$. A éste espacio lo denotaremos por $ODif(A)$.

Dado $g \in ODif(A)$, entonces g se puede escribir como:

$$g := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i D_1^i \circ \cdots \circ D_i^i,$$

dónde $D_j^i \in Der(A)$.

DEFINICIÓN 2.18. Dado:

$$g := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i D_1^i \circ \cdots \circ D_i^i \in ODif(A).$$

Diremos que k es el orden de g.

DEFINICIÓN 2.19. Definiremos al álgebra de operadores multidiferenciales de A como la subálgebra de $(C^\bullet(A), \cup)$ generada por $ODif(A)$, y será denotada por $MODif(A)$.

Un elemento de $MODif(A)$ tendrá grado dado por el complejo de Hochschild y orden dado por el elemento de mayor orden en $ODif(A)$ entre los elementos que lo generan.

DEFINICIÓN 2.20. Los elementos de grado n en $MODif(A)$ los denotaremos por $MODif^n(A)$ y los llamaremos n-operadores diferenciales.

OBSERVACIÓN 2.21. $MODif(A)$ es una subálgebra graduada de $C^\bullet(A)$:

$$MODif(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} MODif^n(A),$$

dónde $MODif^n(A) = MODif(A) \cap C(A)_n$. Y a su vez $MDer(A)$ es subálgebra graduada de $MODif(A)$.

EJEMPLO 2.22. Tomando $A := C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Se tiene que $D_u \cup (D_v \circ D_w)$ dado por

$$D_u \cup (D_v \circ D_w)(f,g) = < u, \partial_{\vec{x}} f > \cdot \left\langle v, \partial_{\vec{x}}(< w, \partial_{\vec{x}} g >)\right\rangle,$$

para todo $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, es un operador multidiferencial de A.

TEOREMA 2.23. $(MODif(A), d_H)$ *es un subcomplejo de* $(C^\bullet(A), d_H)$.

Demostración:

Observe que para todo $D_1, \ldots, D_n \in Der(A)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} & d_H(D_1 \circ \cdots \circ D_n)(a \otimes b) = \\ = \;& a(D_1 \circ \cdots \circ D_n)(b) + (D_1 \circ \cdots \circ D_n)(a)b - (D_1 \circ \cdots \circ D_n)(ab) \\ = \;& -\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l_s \subset I_k^n} D_{l_s}(a) D_{l_s^c}(b), \end{aligned}$$

dónde I_k^n es el conjunto de combinaciones de k con n elementos, $l_s^c = (l_s)^c = \{1, \ldots, n\} \backslash l_s$ y $D_{i_1,\cdots,i_p} = D_{i_1} \circ \cdots \circ D_{i_p}$. Ésto muestra que $d_H(ODif(A)) \subset MODif(A)$.

Luego, todo elemento $\Delta \in MODif(A)$ es una combinación lineal de elementos de la forma:

$$\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_s,$$

dónde $\Delta_1, \ldots, \Delta_s \in ODif(A)$. Observe que:

$$d_H(\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_s) = \sum_{i=1}^{s} \Delta_1 \cup \cdots \cup (d_H \Delta_i) \cup \cdots \cup \Delta_s,$$

y cómo $d_H\Delta_i \in MODif(A)$, se tiene como resultado que $d_H(\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_s) \in MODif(A)$. Y finalmente se concluye que $d_H(MDif(A)) \subset MDif(A)$. •

1.2. Teorema de Hochschild-Konstant-Rosenberg.

A partir de ahora fijaremos M como una variedad y denotaremos $A_M := C^\infty(M)$. El siguiente teorema, a pesar de ser un resultado básico de geometría diferencial, es muy importante en éste trabajo.

TEOREMA 2.24. *El espacio $Der(C^\infty(M))$ es isomorfo a $\mathfrak{X}(M)$.*

La demostración se puede encontrar en [**24**] y en [**26**]. Por otro lado, observe que todo corchete de poisson $\{-,-\}$ es una aplicación simétrica bi diferenciable, y por lo tanto $\{-,-\} \in Der(A) \wedge Der(A)$. En el caso de una variedad M el corchete pertenece a $\mathfrak{X}(M) \wedge \mathfrak{X}(M)$.

Además observe que $MDer(A_M)$ es isomorfo al álgebra tensorial de $\mathfrak{X}(M)$, es decir:

$$MDer(A_M) = \bigoplus (Der(A_M))^{\otimes n} \simeq \bigoplus (\mathfrak{X}(M))^{\otimes n},$$

de la misma manera podemos ver lo siguiente:

$$Alt(MDer(A_M)) = \bigoplus_k (\mathfrak{X}(M))^{\wedge k} =: \wedge^\bullet \mathfrak{X}(M).$$

Y tomando $M = \mathbb{R}^n$, todo elemento $f \in MDer^p(A_M)$ se puede escribir como:

$$f(u_1, \cdots, u_p) = \sum_{i_1 \cdots i_p} f_{i_1 \cdots i_p} \frac{\partial u_1}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial u_p}{\partial x_{i_p}},$$

dónde:

$$f_{i_1 \cdots i_p} = f(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}).$$

PROPOSICIÓN 2.25. *Si $M = \mathbb{R}^n$, para todo $f \in MDer(A_M)$ existen $g \in MODif(A_M)$ y $\alpha \in \wedge^\bullet Der(A_M)$, tales que:*

$$f = d_H g + \alpha.$$

Demostración:

Tomemos $f \in MDer^p(A_M)$, el cual se puede escribir como:

$$f(u_1,\cdots,u_p)=\sum_{i_1\cdots i_p} f_{i_1\cdots i_p}\frac{\partial u_1}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial u_p}{\partial x_{i_p}}.$$

Para $\sigma \in S_p$ definimos:

$$(\sigma f)(u_1,\cdots,u_p)=f(u_{\sigma^{-1}(1)},\cdots,u_{\sigma^{-1}(p)}).$$

Si $\tau \in S_p$ es una transposición de dos elementos consecutivos $i, i+1$ tomaremos a $\Phi_\tau(f)\in MDif^{p-1}(A_M)$ como:

$$\Phi_\tau(f)(u_1,\cdots u_{p-1})=(-1)^i\sum_{r,s} f(u_1\cdots,u_{i-1},x_r,x_s,u_{i+1},\cdots,u_{p-1})\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_r\partial x_s},$$

Nótese que:

$$d_H(\Phi_\tau(f))=f+\tau f.$$

Además si $\tau_1,\tau_2\in S_p$ transposiciones de enteros consecutivos, se tiene que:

$$d_H(\Phi_{\tau_1}(\tau_2 f)-\Phi_{\tau_2}(f))=f-\tau_1\tau_2(f).$$

De donde, siguiendo con ésta operacion se puede definir un $\Phi_\sigma(f)$ para todo $\sigma\in S_p$ tal que:

$$d_H(\Phi_\sigma(p))=f-sign(\sigma)\sigma f.$$

Finalmente sea:

$$\Phi(f):=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\Phi_\sigma(f),$$

De donde:

$$\begin{aligned} f &= d_H(\Phi(f))+\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} sign(\sigma)\sigma f,\\ &= d_H(\Phi(f))+Alt(f). \end{aligned}$$

Donde es claro que $g:=\Phi(f)\in MODif(A_M)$ y $\alpha:=Alt(f)\in\wedge^\bullet Der(A_M)$. •

LEMA 2.26. *Si $M=\mathbb{R}^n$, en el complejo $(MODif(A_M),d_H)$ se tiene que, para todo elemento $f\in Ker(d_H)$ existe $g\in MODif(A_M)$ tal que $f-d_H(g)$ sea de primer orden en su primera variable, es decir:*

$$f-d_H(g)=\sum_i X_i\cup D_i,$$

para algún $X_i\in Der(A)$ y $D_i\in MODif(A)$.

La demostración de éste lemma se puede encontrar en [**14**].

TEOREMA 2.27. *Si $M = \mathbb{R}^n$, para todo k, en el complejo $(MODif(A_M), d_H)$ se tiene que para cada elemento $f \in Ker^k(d_H)$ existe $g \in MODif(A_M)$ y $\alpha \in Alt(MDer(A))$ tal que:*

$$f = d_H(g) + \alpha.$$

Demostración:

Usaremos inducción en el grado de f. Para un elemento f de grado 0 ya hemos probado que si $d_H(f) = 0$ entonces $f \in Der(A)$ entonces, tomando $g = 0$ y $\alpha = f$ se tiene que $f = d_H(g) + \alpha$.

Supongamos que nuestra hipótesis es cierta para todo elemento de grado $k-1$. Sea $f \in Ker(d_H)$ de grado k, por el lema 2.26 se tiene que existe g' tal que:

$$f - d_H(g') = \sum_i X_i \cup D_i,$$

para $X_i \in Der(A)$ linealmente independientes y $D_i \in MODif(A)$. Como $d_H(f) = 0$ tenemos que $d_H(D_i) = 0$. Usando la hipótesis inductiva existen $g_i \in MODif(A_M)$ y $\alpha_i \in Alt(MDer(A))$ tal que $D_i = d_H(g_i) + \alpha_i$. Luego:

$$\begin{aligned} f &= d_H(g') + \sum_i d_H(X_i \cup g_i) + X_i \cup \alpha_i, \\ &= d_H\left(g' + \sum_i X_i \cup g_i\right) + \sum_i X_i \cup \alpha_i \end{aligned}$$

La última parte de la ecuación es un elemento de $MDer(A)$ así, usando la propisición 2.25, debe existir un $g^* \in MDer(A)$ y un $\alpha \in Alt(MDer(A))$ tal que:

$$\sum_i X_i \cup \alpha_i = d_H(g^*) + \alpha,$$

y finalmente:

$$f = d_H\left(g' + g^* + \sum_i X_i \cup g_i\right) + \alpha.$$

Con lo que se concluye la demostración. •

TEOREMA 2.28. *(Hochschild-Konstant-Rosenberg) Dada M una variedad compacta, en el complejo $(MODif(A_M), d_H)$ se tiene que para todo elemento $f \in Ker(d_H)$ existe $g \in MODif(A_M)$ y $\alpha \in \wedge^{\bullet}\mathfrak{X}(M)$ tal que:*

$$f = d_H(g) + \alpha.$$

Demostración:
Sea $(U_\lambda, \rho_\lambda)$ una partición de la unidad. Entonces todo $f \in Ker(d_H)$ se puede escribir como:

$$f = \sum_\lambda \rho_\lambda f.$$

Por el lema 2.27 se tiene que existen $g_\lambda \in MODif(A_M)$ y $\alpha_\lambda \in \wedge^{\bullet}\mathfrak{X}(M)$ tal que:

$$\rho_\lambda f = d_H(g_\lambda) + \alpha_\lambda.$$

Por lo tanto tomando:

$$g = \sum g_\lambda, \qquad \alpha = \sum \alpha_\lambda,$$

tenemos que $f = d_H(g) + \alpha$ con $g \in MODif(A_M)$ y $\alpha \in \wedge\mathfrak{X}(M)$. •.

COROLARIO 2.29. *(Hochschild-Konstant-Rosenberg) Dada M una variedad compacta se tiene que la homología del complejo $(MODif(A_M), d_H)$ es isomorfa a $\wedge^{\bullet}\mathfrak{X}(M)$.*

Demostración:
Por el teorema 2.28 se tiene que:

$$H(MODif(A_M), d_H) = \bigoplus_n \frac{Ker^n(d_H)}{Img^n(d_H)} = \bigoplus_n \wedge^n Der(A_M) \simeq \wedge^{\bullet}\mathfrak{X}(M).$$

•

Finalmente, todo corchete de Poisson sobre M es un elemento de $(\mathfrak{X}(M))^{\wedge 2} \subset \wedge^{\bullet}\mathfrak{X}(M)$, por lo cual todo corchete de Poisson representa a un elemento en la homología de Hochschild de $MODif(A_M)$.

2. Teorema de Kontsevich-Tamarkin

Para la demostración de éste teorema se utiliza la estructura de operads y las álgebras de Gerstenhaber. Empezaremos por introducir las álgebras de Gerstenhaber.

2.1. Álgebras de Gerstenhaber.

DEFINICIÓN 2.30. Un álgebra de Gerstenhaber consiste en una terna $(L, \cup, [-,-])$ dónde:

- L es un K-espácio graduado.
- $\cup$ es un operador bi-lineal de grado cero.
- $[-,-]$ es un operador bilineal de grado -1.

Además éstos elementos están sujetos a los siguientes axiomas:

(1) $\cup$ es asociativo.

(2) $\cup$ es conmutativo, es decir, para todo $a, b \in L$ se tiene que:

$$a \cup b = (-1)^{\bar{a}\bar{b}} b \cup a.$$

(3) $[-,-]$ es antisimétrico, es decir, para todo $a, b \in L$ se tiene que:

$$[a,b] = -(-1)^{(\bar{a}-1)(\bar{b}-1)}[b,a].$$

(4) $[-,-]$ satisface jacobbi, es decir, para todo $a, b, c \in L$ se tiene que:

$$[a,[b,c]] = [[a,b],c] + (-1)^{(\bar{a}-1)(\bar{b}-1)}[b,[a,c]]$$

(5) $\cup$ y $[-,-]$ satisfacen poisson, , es decir, para todo $a, b \in L$ se tiene que:

$$[a, b \cup c] = [a,b] \cup c + (-1)^{(\bar{a}-1)\bar{b}} b \cup [a,c]$$

TEOREMA 2.31. *Dada M una variedad compacta, H la homología del complejo $(MODif(A_M), d_H)$, $\cup$ y $[-,-]$ el producto y el corchete usual sobre $C^\bullet(A_M)$ y $\cdot = Alt(\cup)$. Se tiene que $(H, \cdot, [-,-])$ es un álgebra de Gerstenhaber.*

Demostración:

Sólo falta ver que $\cdot$ y $[-,-]$ satisfacen Poisson.
Sean $a, b, c \in L$

$$
\begin{aligned}
&[a, b \cdot c] - [a, b] \cdot c - (-1)^{(\bar{a}-1)\bar{b}} b \cdot [a, c] = \\
&\qquad = [a, b \cup c] - [a, b] \cup c - (-1)^{(\bar{a}-1)\bar{b}} b \cup [a, c] \\
&\qquad\quad - [a, c \cup b] + c \cup [a, b] + (-1)^{(\bar{a}-1)\bar{b}} [a, c] \cup b \\
&\qquad = a \circ (b \cup c) - (a \circ b) \cup c - b \cup (a \circ c) \\
&\qquad\quad - a \circ (c \cup b) + c \cup (a \circ b) + (a \circ c) \cup b
\end{aligned}
$$

y cómo a es un diferencial,

$$[a, b \cdot c] - [a, b] \cdot c - (-1)^{(\bar{a}-1)\bar{b}} b \cdot [a, c] = 0.$$

•

TEOREMA 2.32. *Siendo $H(C_2)$ es la homología de $Chains(C_2)$ se tiene que las $H(C_2)$-álgebras son álgebras de Gerstenhaber.*

La demostración de éste teorema se puede encontrar en [**10**], ésta demostración consiste esencialmente en una homotopía entre el Operad C_2 y la colección de n puntos distintos en el disco unitario, luego en una homotopía entre la colección anterior y S_1 de donde:

$$H(C_2) \simeq H(S^1) \simeq K\mu \oplus K\lambda \simeq Gers(2).$$

Dónde μ representa la multiplicación y λ el corchete.

2.2. Teorema de Kontsevich-Tamarkin.

DEFINICIÓN 2.33. Dado C un complejo, diremos que C es formal si existe un morfismo de complejos $\varphi : H(C) \to C$ tal que su acción en la homología $H\varphi : H(C) \to H(C)$ sea un isomorfismo.

El teorema de Kontsevich-Tamarkin fue princpialpemte planteado y demostrado por Kontsevich de la siguiente manera:

TEOREMA 2.34. *Dada M una variedad compacta, sea $A_M := C^\infty(M)$ y $C := MODif(A_M)$ el subcomplejo de Hochschild de A, entonces existe un morfismo de álgebras graduadas $\varphi : H(C) \to C$ tal que su reducción a la homología $H\varphi : H(C) \to H(C)$ sea un isomorfismo de álgebras graduadas.*

Éste teorema es llamado teorema de formalidad de Kontsevich, pues dice que el complejo $C := MODif(A_M)$ es formal. Pero Tamarkin realiza en [**33**] la demostración de éste teorema con otro planteamiento. En éste trabajo nos guiaremos en [**15**] para mostrar un esbozo de la demostración del planteamiento de Tamarkin. Basicamente ésta demostración consiste en los siguientes teoremas:

TEOREMA 2.35. *El operad $Chains(C_2)$ es formal; es decir, existe un quasi isomorfismo $\alpha : H(C_2) \to Chains(C_2)$*

Ver [**33**].

TEOREMA 2.36. *Existe una acción natural del operad $Chains(C_2)$ sobre el complejo $C := MODif(A_M)$.*

Éste teorema es conocido como la conjetura de Deligne y fue demostrado por Kontsevich y Soibelman en [**17**]. No presentaremos la demostración de éstos teoremas por lo largas que resultan.

TEOREMA 2.37. *Sea V un un K-espácio finito dimensional, $A := SV$ el álgebra exterior de V, $C^\bullet(A)$ el complejo de Hochschild de A, y G un álgebra de Gerstenhaber diferencial graduada tal que $H(G) \simeq H(C^\bullet(A))$ entonces G es formal.*

Ver [**33**].

TEOREMA 2.38. *(Kontevish-Tamarkin) Para cada K álgebra asociativa A, existe una álgebra diferencial graduada de Gerstenhaber G tal que:*

- *$H(G) \simeq H(C^\bullet(A))$.*
- *G está ligado a $C^\bullet(A)$ por una secuencia de quasi-isomorfismos de álgebras diferenciales graduadas.*

éste teorema demuestra la formalidad de C pues:

$$H(C) \simeq H(G) \to G \to C.$$

Para mostrar un esbozo de la demostración denotaremos Lie al operad que genera las álgebras de Lie y, dado el hecho que toda álgebra de Gerstenhaber también es un álgebra de Lie, se tiene que existe un morfismo de operad de $Lie \to H(C_2)$. Más aún, cómo $H(C^\bullet(A))$ es un álgebra de Gerstenhaber, se tiene que existen morfismos de operads λ y φ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Lie \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & End(H(C^\bullet(A))) \\ H(C_2) \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd} .$$

Por otro lado $C^\bullet(A)$ es un álgebra de Lie, por lo cual existe un morfismo de operads $\Lambda : Lie \to End(C^\bullet(A))$. En la demostración de 2.38 Tamarkin muestra que φ induce un morfismo $\Phi : C_2 \to End(C^\bullet(A))$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Lie \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d] & End(C^\bullet(A)) \\ H(C_2) \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Éste morfismo Φ está dado por dos morfismos $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$ dónde:

- $\Phi_1 : H(C_2) \to Chains(C_2)$ está dado por la formalidad de $Chains(C_2)$.
- $\Phi_2 : Chains(C_2) \to End(C^\bullet(A))$ está dado por la conjetura de Deligne.

Y finalmente el G del teorema 2.38 es la restricción sobre Φ al álgebra $C^\bullet(A)$.

Capítulo 3

Cuantización

Los formalismos Lagrangianos y Hamiltonianos ayudan a la comprensión y al estudio matemático de fenómenos físicos. En éste capítulo veremos brevemente en que consiste cada sistema y su relación con las variedades simplécticas. Con éste propósito seguiremos a [**7**] y a [**32**].

Luego seguiremos a [**13**] para mostrar brevemente en que consiste la mecánica cuántica, la noción de cuantizar y las razones para describir éste proceso como un funtor, y finalmente mostraremos que la cuantización de Schrödinger no puede ser descrita de manera funtorial.

Para concluir éste capítulo mostraremos en qué consiste la cunatización por deformación y su relación con el teorema de Kontsevich. Para ésto seguiremos a [**15**] y [**8**].

1. Mecánica clásica

1.1. Sistema Lagrangiano.

El espácio donde ocurre algún fenómeno físico, puede representarse matemáticamente como una variedad M. El principal objetivo de la mecánica clasica es encontrar las curvas que describen el movimiento de las partículas sobre el espácio.

Si una partícula sobre M se encuentra en una posición $x_0 \in M$, y luego de un tiempo se encuentra en una posición $x_1 \in M$, consideraremos el siguiente conjunto:

$$P(M)_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} := \{\vec{\gamma} \in C^\infty([0,1], M) \quad / \quad \vec{\gamma}(0) = \vec{x}_0 \quad y \quad \vec{\gamma}(1) = \vec{x}_1\},$$

que representa todas las posibles curvas que pudo tomar la partícula. Un elemento de éste conjunto, representa el camino que toma la partícula para ir desde x_0 hasta x_1.

Para saber cuál curva representa el movimiento de la partícula, hay que tomar en cuenta el "principio de minima acción". Éste principio viene de la observación física y dice que el camino que toma una partícula es el mínimo de una función $S : P(M)_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} \to \mathbb{R}$.

Teniendo ésto en mente definiremos lo que es el sistema Lagrangiano, para luego mostrar el criterio que se utiliza para saber cuál curva describe el movimiento de la partícula.

DEFINICIÓN 3.1. Llamaremos sistema Lagrangiano a un par de elementos (M, L) donde:

- M es una variedad suave de dimensión finita n.
- $L : \mathbb{R} \times TM \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable a la que denominaremos función lagrangiana.

•

DEFINICIÓN 3.2. Diremos que una curva $\vec{\gamma}_0 : [0,1] \to M$ es una curva de movimiento, si y sólo si, es un mínimo de la función $S : P(M)_{x_0}^{x_1} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$S(\vec{\gamma}) := \int_0^1 L(t, \vec{\gamma}(t), \dot{\vec{\gamma}}(t))dt.$$

•

Continuaremos con un teorema que nos indica, una condición necesaria y suficiente que deben cumplir las curvas de movimiento.

TEOREMA 3.3. *Dado:* (M, L) *un sistema lagrangiano y* $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \to M$ *una curva.* g *es una curva de movimiento del sistema si, y sólo si, satisface las siguientes ecuaciónes:*

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(t, \vec{\gamma}(t), \partial \dot{\vec{\gamma}}(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)(t, \vec{\gamma}(t), \dot{\vec{\gamma}}(t)),$$

denominadas ecuaciones de Euler-Lagrange.

Demostración:
El conjunto $P(M)_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1}$ posee una estructura de variedad de Frechèt, por tanto existe una noción de diferenciabilidad sobre $P(M)_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1}$. De ésta forma, $\vec{\gamma}_0 \in P(M)_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1}$ es un mínimo de S si, y sólo si, para toda curva $\vec{\Gamma} : (-\delta, \delta) \to P(M)_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1}$ cuyo valor en 0 sea $\vec{\gamma}_0$ ($\vec{\Gamma}(0) = \vec{\gamma}_0$) se tiene que:

$$\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} S(\vec{\Gamma}_\varepsilon) = 0. \tag{3.1}$$

Observe que toda curva $\vec{\Gamma} : (-\delta, \delta) \to P(M)_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1}$ se puede representar como una función de dos variables $\vec{\Gamma}(t,\varepsilon)$, tal que, para cada ε_0 fijo, $\vec{\Gamma}_\varepsilon(t) := \vec{\Gamma}(t,\varepsilon_0)$ representa una curva sobre M.

Además $\vec{\Gamma}(t,\varepsilon)$ se puede expresar[1] como:

$$\vec{\Gamma}(t,\varepsilon) = \vec{\gamma}(t) + \varepsilon \vec{h}(t). \tag{3.2}$$

Finalmente, de la ecuación (3.1) tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} S(\vec{\Gamma}_\varepsilon) \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \left(\int_0^1 L(t, \vec{\Gamma}_\varepsilon, \dot{\vec{\Gamma}}_\varepsilon) dt \right) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial \Gamma_{i\varepsilon}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{\Gamma}_{i\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right) \right) dt, \end{aligned}$$

luego integrando por partes ($U = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}^i}$ y $dV = \frac{\partial \dot{\Gamma}_i}{\partial \varepsilon}$) y utilizando (3.2) nos da como resultado que:

$$0 = \int_0^1 \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial \Gamma_\varepsilon^i}{\partial \varepsilon} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \Gamma_{i\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right) dt + \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} h|_{t=0}^{t=1}.$$

Por otro lado, dado que $\vec{\Gamma}(t,\varepsilon)$ es una curva sobre $P(M)_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1}$, se tiene que:

$$\begin{array}{lcl} \vec{\Gamma}(0,\varepsilon) = \vec{x}_0, & & \varepsilon\vec{h}(0) = \Gamma(0,\varepsilon) - \vec{\gamma}(0) = \vec{x}_0 - \vec{x}_0 = \vec{0}. & & \vec{h}(0) = \vec{0}, \\ & \Rightarrow & & \Rightarrow & \\ \vec{\Gamma}(1,\varepsilon) = \vec{x}_1. & & \varepsilon\vec{h}(1) = \vec{x}_1 - \vec{x}_1 = \vec{0}. & & \vec{h}(1) = \vec{0}. \end{array} \tag{3.3}$$

Y así tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial \Gamma_\varepsilon^i}{\partial \varepsilon} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \Gamma_{i\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right) dt \\ &= \sum_i \int_0^1 \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) \frac{\partial \Gamma_{i\varepsilon}}{\partial \varepsilon} dt. \end{aligned}$$

Esto se cumple para toda curva de curvas $\Gamma_\varepsilon(t)$ si, y sólo si:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0.$$

[1]el lector puede pensar en una expansión de Taylor en la variable ε centrado en $\varepsilon = 0$

•

EJEMPLO 3.4. Si $M = \mathbb{R}$ y $L = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} - P(x)$, la ecuación de Euler-Lagrange se escribe como:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{x}}).$$

Pensando en $F = \frac{\partial P}{\partial x}$ como una fuerza, tenemos la segunda ley de Newton.

Además del criterio de Euler-Lagrange, existen otros criterios para encontrar curvas de movimiento. Uno de éstos consiste en buscar las superficies en donde yacen éstas curvas.

DEFINICIÓN 3.5. Sea (M, L) un sistema lagrangiano. Se dice que una función $I : \mathbb{R} \times T(M) \to \mathbb{R}$ es una integral de movimiento de (M, L) si, y sólo si:

$$\frac{d}{dt} I(t, \vec{\gamma}(t), \dot{\vec{\gamma}}(t)) = 0,$$

para toda curva de movimiento $\vec{\gamma}$. •

Si $I : \mathbb{R} \times T(M) \to \mathbb{R}$ es una integral de movimiento, entonces las curvas de movimiento yacen sobre superficies de la forma:

$$I^{-1}(C) := \{(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) \in \mathbb{R} \times TM \;/\; I(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = C\},$$

donde C es una constante.

DEFINICIÓN 3.6. Dado un sistema lagrangiano (M, L), la energía de éste sistema es una función $E : \mathbb{R} \times T(M) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$E(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) := \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L.$$

•

La energía es uno de los ejemplos más comunes de integral de movimiento. Sin embargo, la energía es una integral de movimiento sólo bajo ciertas condiciones.

PROPOSICIÓN 3.7. *Dado* (M, L) *un sistema lagrangiano. Si* $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, *entonces la energía es una integral de movimiento.*

Demostración:

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos que:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\dot{x}_i}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial x^i} \right) - \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

•

EJEMPLO 3.8. Si $M = \mathbb{R}$ y $L = \frac{m\vec{x}^2}{2} - P(x)$, la energía se escribe como:

$$E(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) := \frac{m\vec{x}^2}{2} + P(x),$$

es decir energía cinética más energía potencial.

Para encontrar otras integrales de movimiento, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 3.9. *(Emmy Noether) Sea:* (M, L) *un sistema Lagrangiano,* $g_s : M \to M$ *un flujo y* $N : \mathbb{R} \times T(M) \to \mathbb{R}$ *la función dada por:*

$$N(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) := \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) \left(\frac{\partial g_s^i}{\partial s}(\vec{x})|_{s=0} \right).$$

Si g *satisface la siguiente ecuación:*

$$L(t, g_s(\vec{x}), (g_s)_*(\dot{\vec{x}})) = L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) \qquad \forall s,$$

entonces N *es una integral de movimiento.*

Demostración:

Sea $\vec{x}(t) \in M$ una curva de movimiento. Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos:

$$0 = \frac{\partial L(t, g_s(\vec{x}(t)), (g_s)_*(\dot{\vec{x}}(t)))}{\partial s} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \left(\frac{\partial g_s^i}{\partial s}|_{s=0} \right) \right) = \frac{d}{dt} N(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)).$$

•

Por otro lado, analizando ésta demostración, podemos observar que el resultado $\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{d}{dt}N$ depende solamente de la ecuación de Euler-Lagrange, sin importar qué condición satisfaga g_s. De ésta forma se puede generalizar el teorema de Emmy Noether de la siguiente manera:

PROPOSICIÓN 3.10. *Sea:* (M, L) *un sistema Lagrangiano y* $g_s : M \to M$ *un flujo. Si existe una función* $K : \mathbb{R} \times T(M) \to \mathbb{R}$ *que satisfaga la ecuación:*

$$\frac{\partial L}{\partial s}(t, g_s(\vec{x}(t)), (g_s)_*(\dot{\vec{x}}(t))) = \frac{d}{dt} K(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)),$$

para toda curva de movimiento $\vec{x}(t) \in M$, entonces la función dada por:

$$I := N - K$$

es una integral de movimiento.

Demostración:
Sea $\vec{x}(t) \in M$ una curva de movimiento, entonces

$$\frac{d}{dt} I = \frac{d}{dt} N - \frac{d}{dt} K = 0.$$

•

OBSERVACIÓN 3.11. Observe que si $K = N + C$ con C constante, cumple la condición $\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{d}{dt} K$ pero la función integral es una constante... y no nos da ninguna información.

EJEMPLO 3.12. Una de las leyes de Kepler dice que la velocidad angular de los planetas girando alrededor del sol es constante. Para demostrar este hecho usaremos el teorema de Noether. Tenemos que nuestra variedad M es un plano, que podemos pensar como $\mathbb{R}^2$. Consideremos el problema en coordenadas polares "(r, θ)". Según la ley de la gravedad, el potencial gravitatorio solo depende de la distancia entre los cuerpos por tanto el Lagrangiano viene dado por:

$$L = \frac{m(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2)}{2} - P(r).$$

En este caso el lagrangiano no depende de la variable θ por lo que tenemos como simetría a $g_s(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = (r, \theta + s, \dot{r}, \dot{\theta})$ entonces por el teorema de Emmy Noether tenemos que la función:

$$I(t, x, \vec{x}) = N = m\dot{\theta},$$

es una integral de movimiento, con esto tenemos que $m\dot{\theta} = constante$ durante toda la trayectoria es decir la velocidad angular es constante (mientras no se varíe la masa). •

1.2. Transformada de Legendre.

La transformada de Legendre es una herramienta matemática que permite cambiar los elementos de un espácio vectorial V, por los elementos de su dual V^*, y a los campos escalares sobre V por campos escalares sobre V^*.

A contunuación veremos la construcción de ésta transformada:

Sea: V un espácio vectorial, V^* su dual y $f : V \to \mathbb{R}$ una función cóncava.
Se define la función $F : V \times V^* \to \mathbb{R}$ como:

$$F(v, p) := p(v) - f(v).$$

La concavidad de f asegura que para cada $p_0 \in V^*$ la función $F(v, p_0)$ tiene un mínimo, sea $\varphi(p_0) \in V$ el mínimo de $F(v, p_0)$. De ésta manera tenemos una función $\varphi : V^* \to V$.
Finalmente, la función f tiene asignada la función $f^*(p) = F(v(p), p)$ sobre V^*. •

TEOREMA 3.13. *Sea (M, L) un sistema lagrangiano. Si la función $\phi_{t_0,\vec{x}_0} : T_{\vec{x}_0}M \to T^*_{\vec{x}_0}M$ dada por:*

$$\phi_{t_0,\vec{x}_0}(\dot{\vec{x}}) = \partial_{\dot{\vec{x}}} L(t_0, \vec{x}_0, \dot{\vec{x}})$$

es invertible, entonces la transformada de legendre de la función $L(t_0, \vec{x}_0, \dot{\vec{x}})$ le asigna:

- *A cada $\vec{p} \in T^*_{\vec{x}}(M)$, el elemento $\varphi(\vec{p}) = \phi^{-1}(\vec{p}) \in T_{\vec{x}_0}$.*

- *A L, la energía E del sistema.*

Demostración:
Sean: $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\vec{x}_0 \in M$. Usando la transformada de legendre para:

$$L_{t_0,\vec{x}_0}(\dot{\vec{x}}) = L(t_0, \vec{x}_0, \dot{\vec{x}}),$$

tenemos la siguiente función:

$$F_{t_0,\vec{x}_0}(\dot{\vec{x}}, \vec{p}) = < \vec{p}, \dot{\vec{x}} > - L_{t_0,\vec{x}_0}(\dot{\vec{x}}).$$

Para cada $\vec{p}_0 \in T^*_{\vec{x}}M$ fijo, busquemos el mínimo de F:
Observe que para toda curva $\dot{\vec{x}}(t) \in T_{\vec{x}}M$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(\dot{\vec{x}}(t), \vec{p}_0)}{\partial t} &= \left\langle \vec{p}_0, \frac{\partial(\dot{\vec{x}}(t))}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \partial_{\dot{\vec{x}}} L_{t_0,\vec{x}_0}(\dot{\vec{x}}(t)), \frac{\partial(\dot{\vec{x}}(t))}{\partial t} \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{p}_0 - \partial_{\dot{\vec{x}}} L_{t_0,\vec{x}_0}(\dot{\vec{x}}(t)), \frac{\partial(\dot{\vec{x}}(t))}{\partial t} \right\rangle
\end{aligned}$$

Como $\phi_{t_0,\vec{x}_0}$ es invertible, sea $\vec{x}(p_0) = \phi^{-1}(p_0)$, así se tiene que:

$$\frac{\partial F(\dot{\vec{x}}(t), \vec{p}_0)}{\partial t} = \left\langle \partial_{\dot{\vec{x}}} L_{t_0,\vec{x}_0}(\dot{\vec{x}}(p_0)) - \partial_{\dot{\vec{x}}} L_{t_0,\vec{x}_0}(\dot{\vec{x}}(t)), \frac{\partial(\dot{\vec{x}}(t))}{\partial t} \right\rangle.$$

Por lo tanto, para toda curva que pase por $\dot{\vec{x}}(p_0)$ se tiene que $\frac{\partial F(\vec{p}_0,\dot{\vec{x}}(t))}{\partial t}|_{\dot{\vec{x}}=\dot{\vec{x}}(p_0)} = 0$. Luego $\dot{\vec{x}}(p_0)$ es el mínimo de F y $\varphi = \phi^{-1}$.

Finalmente:

$$L^*(\vec{p}) = F(\varphi(\vec{p}), \vec{p}) =< \vec{p}, \varphi(\vec{p}) > - L(\varphi(p)) =< \vec{p}, \phi^{-1}(\vec{p}) > - L(\phi^{-1}(p)),$$

si aplicamos el pullback por φ tenemos:

$$L^*_{\varphi}(\dot{\vec{x}}) = \left\langle \partial_{\dot{\vec{x}}} L_{t_0,\vec{x}_0}(\dot{\vec{x}}), \dot{\vec{x}} \right\rangle - L_{t_0,\vec{x}_0}(\dot{\vec{x}}) = E(t_0, \vec{x}_0, \dot{\vec{x}}).$$

•

DEFINICIÓN 3.14. Un sistema Lagrangiano (M, L) es no-degenerado si la función $\phi_{t_0,\vec{x}_0} : T_{\vec{x}_0}M \longrightarrow T^*_{\vec{x}_0}M$ dada por:

$$\phi_{t_0,\vec{x}_0}(\dot{\vec{x}}) = \partial_{\dot{\vec{x}}} L(t_0, \vec{x}_0, \dot{\vec{x}})$$

es invertible para todo $\vec{x}_0 \in M$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo. •

Por otro lado, usando las transformadas de Legendre para cada punto de $(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) \in TM$ tenemos un covector sobre $\vec{x} \in M$, y como $M \subset TM$, todo covector sobre $\vec{x} \in M$ induce un covector sobre $(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) \in TM$, por lo tanto para cada punto $t \in \mathbb{R}$ fijo, tenemos una 1-forma sobre TM dada por:

$$\rho_t(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) :=< (\partial_{\dot{\vec{x}}} L)(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}), dx > .$$

DEFINICIÓN 3.15. Dado un sistema Lagrangiano (M, L). Llamaremos por forma canónica de Liouville a la forma diferencial sobre TM dada por:

$$\rho_t(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) :=< (\partial_{\dot{\vec{x}}} L)(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}), dx >=< \vec{p}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}), dx > .$$

•

PROPOSICIÓN 3.16. *Un sistema Lagrangiano (M, L), con forma canónica de Liouville ρ_t, es no-degenerado si, y sólo si, la 2-forma $d\rho_t$ sobre TM es no degenerada para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración:

Por el teorema de la función inversa, (M,L) no degenerado si, y sólo si:

$$det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j}\right)_{i,j} \neq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado observe que:

$$\begin{aligned} d\rho_t &= d\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} dx_i\right) \\ &= \left(\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j\right) + \left(\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} d\dot{x}_j \wedge dx_i\right) \end{aligned}$$

Si llamamos:

$$B := \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial x_j}\right)_{ij} \quad y \quad A := \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j}\right)_{ij}$$

entonces, para todo X, Y campos de TM:

$$\begin{aligned} d\rho_t(X,Y) &= \left\langle Y, \begin{bmatrix} B & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X \right\rangle - \left\langle Y, \begin{bmatrix} B^T & 0 \\ A^T & 0 \end{bmatrix} X \right\rangle \\ &= \left\langle Y, \begin{bmatrix} B - B^T & A \\ -A^T & 0 \end{bmatrix} X \right\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto ρ_t es no degenerada si, y sólo si:

$$\det \begin{bmatrix} B - B^T & A \\ -A^T & 0 \end{bmatrix} = (\det A)^2 \neq 0$$

•

Si (M,L) es un sistema Lagrangiano no degenerado los elemenos:

$$(q,p) = (\vec{x}, \partial_{\dot{\vec{x}}} L(t_0, \vec{x}_0, \dot{\vec{x}})) \in T^*M,$$

representan un sistema coordenado en T^*M.

DEFINICIÓN 3.17. Dado (M, L) un sistema lagrangiano no degenerado, llamaremos al sistema de coordenadas:

$$(q, p) = (\vec{x}, \partial_{\dot{\vec{x}}} L(t_0, \vec{x}_0, \dot{\vec{x}})) \in T^*M,$$

coordenadas de Legendre.

Si (M, L) es un sistema lagrangiano no degenerado, usando las coordenadas de Legendre $(\vec{q}, \vec{p})$ podemos rescribir a la energía como:

$$E(t, \vec{q}, \vec{p}) = \left\langle \vec{p}, \dot{\vec{q}} \right\rangle - L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}),$$

dónde $\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{x}}(t, \vec{q}, \vec{p})$ viene dado por la inversa de $\partial_{\dot{\vec{x}}} L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$.

TEOREMA 3.18. *Dado (M, L) es un sistema lagrangiano no degenerado, usando las coordenadas de Legendre $(\vec{q}, \vec{p})$, las ecuaciones de Euler-Lagrange de escriben como:*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial E}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial E}{\partial q_i}$$

Demostración:
Observe que:

$$\begin{aligned} dE &= \left\langle (\partial_{\vec{q}} E), d\vec{q} \right\rangle + \left\langle (\partial_{\vec{q}} E), d\vec{p} \right\rangle + \frac{\partial E}{\partial t} \\ &= \left\langle (-\partial_{\vec{q}} L), d\vec{q} \right\rangle + \left\langle \dot{\vec{q}}, d\vec{p} \right\rangle + \frac{\partial E}{\partial t}, \end{aligned}$$

por lo tanto $(\partial_{\vec{q}} E) = (-\partial_{\vec{q}} L)$ y $(\partial_{\vec{q}} E) = \dot{\vec{q}}$.

Dado a que toda curva de movimiento satisface que $(\partial_q L) = \frac{d}{dt} \partial_{\dot{\vec{q}}} L = \frac{d}{dt} \vec{p} = \dot{\vec{p}}$, entonces:

$$(\partial_{\vec{q}} E) = -\dot{\vec{p}} \qquad y \qquad (\partial_{\vec{q}} E) = \dot{\vec{q}}$$

•

OBSERVACIÓN 3.19. Dado (M,L) un sistema lagrangiano no degenerado, usando las coordenadas de Legendre, la forma canónica de Liouville se puede representar como la 1-forma $<\vec{p},d\vec{q}>$ sobre T^*M.

1.3. Sistema Hamiltoniano.

DEFINICIÓN 3.20. Llamaremos sistema hamiltoniano a un par de elementos (M,H) donde:

- M es una variedad suave de dimensión finita.
- $H:\mathbb{R}\times T^*M\to\mathbb{R}$ es una función diferenciable llamada función hamiltoniana. •

En un sistema hamiltoniano se puede pensar a la función H cómo la energía de un sistema lagrangiano.

DEFINICIÓN 3.21. Diremos que una curva $\vec{\gamma}(t)=(\vec{q}(t),\vec{p}(t))$ sobre T^*M es una curva de movimiento si satisface las siguientes ecuaciones:

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

•

TEOREMA 3.22. *Dado (M,H) un sistema Hamitoniano, si $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ entonces H es constante para toda curva de movimiento.*

Demostración:
Sea $\vec{\gamma}(t)=(\vec{q}(t),\vec{p}(t))$ una curva de movimiento, entonces:

$$\frac{dH(t,\vec{\gamma}(t))}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)=\frac{\partial H}{\partial t}=0$$

•

DEFINICIÓN 3.23. Dada una variedad M de dimensión n y dos funciones $f,g\in C^\infty(T^*M)$, definimos el corchete de Poisson de f con g como:

$$\{f,g\}=\sum_i\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}$$

Observe que si $\vec{\gamma}(t) = (\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ es una curva de movimiento para un sistema hamiltoniano (M, H), entonces para toda función $f \in C^\infty(T^*M)$ se tiene que:

$$\frac{df(\vec{\gamma})}{dt} = \{H, f\}.$$

DEFINICIÓN 3.24. Diremos que una función $f \in C^\infty(T^*M)$ es una integral de movimiento si, y sólo si:

$$\{H, f\} = 0.$$

•

DEFINICIÓN 3.25. Para un sistema Hamiltoniano (M, H), llamaremos forma canónica de Liouville, a la 1-forma diferencial: $\rho :=< \vec{p}, d\vec{q} >$. •

Finalmente, si tenemos un sistema hamiltoniano (M, H) con forma canónica de Liuville ρ, llamando $W = T^*M$ y a $\omega = d\rho$, tenemos que (W, ω) es una variedad simpléctica. Además dado un sistema lagrangiano no degenerado, aplicando sus transformadas de Legendre tenemos un sistema hamiltoniano. Con ésto podemos concluir que la mecánica clásica se modela a través de una variedad simpléctica.

Por otro lado, dado un sistema Hamiltoniano (M, H) con forma canónica de Liouville ρ y coordenadas canónicas $(\vec{q}, \vec{p})$:

- La variedad M representa el espacio físico.
- La variedad T^*M representa el espacio de faces.
- Los elementos de $C^\infty(W)$ representan los observables.
- Los observables dados por las coordenadas de $\vec{q}$ representan la posición.
- Los observables dados por las coordenadas de $\vec{p}$ representan el momenta.
- Dado un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$. El observable $P_X(\vec{q}, \vec{p}) :=< \vec{p}, X(\vec{q}) >= i_X\rho$ representa el momentum de X.

Observe que según el teorema 1.56 todo observable genera un flujo simpléctico sobre T^*M.

2. Mecánica cuántica y cuantización

La mecánica clásica, a pesar de funcionar muy bien al describir la gran mayoría de los fenómenos físicos, no es capaz de describir toda la física, en particular no puede describir el comportamiento de partículas subatómicas (ver [**11**] y [**36**]). Una de las razones de éste hecho es que éstas partículas actúan como ondas y no se pueden precisar sus estados. Para explicar el comportamiento de éstas partículas surge la rama de la física llamada mecánica cuántica.

Por otro lado, Dirac (ver [**11**]) plantea la importancia de partir de una teoría clásica para llegar a una teoría cuántica. A éste proceso se le denomina cuantización y no es un procedimiento único.

2.1. Cuantización como un funtor.

En la mecánica cuántica se representa:

(1) El espácio de fases como un espácio de Hilbert H, pues los estádos de una partícula no se pueden precisar, y son representados como una función de probabilidad,
(2) Los observables como los operadores sobre H, pues los observables cambian el estádo de una partícula.

La cuantización es un proceso que consiste en asignar a cada teoría de la mecánica clásica, una teoría de la mecánica cuántica. Inicialmente (ver [**13**]) éste proceso se pensó como una forma de asignar:

(1) A cada variedad simpléctica (W,ω), un espácio de Hilbert H_W,
(2) A cada observable $f \in C^\infty(W)$, un operador $\hat{f} : H_W \to H_W$.

Pero dado el teorema 1.56, todo observable genera un flujo simpléctico y, para cada t, un simplectomorfismo. Dado a éste hecho, se puede pensar que la cuantización se puede formular como una forma de asignar:

(1) A cada variedad simpléctica (W,ω), un espácio de Hilbert H_W,
(2) A cada simplectomorfismo $\varphi : W \to W$, un operador $\hat{\varphi} : H_W \to H_W$,

es decir, como un funtor de la categoría de variedades simplécticas a la categoría de espacios de Hilbert.

Sin embargo, al tratar de formular a la cuantización como un funtor surgen varios problemas que veremos más adelante.

2.2. Cuantización de Schrödinger.

DEFINICIÓN 3.26. La cuantización de Schrödinger (primera cuantización) consiste en lo siguiente (ver [**11**] y [**13**]):

- A cada variedad simpléctica (W,ω) se le asigna el espácio de Hilbert $\mathfrak{H}(W)$ de 1/2-densidades sobre W.
- A cada observable $f \in C^\infty(T^*M)$ se le asigna un elemento $\hat{f} \in \mathfrak{H}(W)$, tal que se cumpla lo siguiente:
  - La forma de asignar elementos es lineal, es decir:

$$\widehat{(\alpha f + \beta g)} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$$

    para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
  - Se preserva a la identidad, es decir:

$$\hat{1} = I$$

    dónde 1 es la función unidad en W e I la identidad en $\mathfrak{H}(W)$.
  - El conmutador de $\mathfrak{H}(W)$ cumple:

$$[\hat{f}, \hat{g}] := \hat{f} \circ \hat{g} - \hat{g} \circ \hat{f} = i\hbar\widehat{\{f,g\}}$$

    dónde $\hbar$ es la constante de Planck.
- Si (q^i, p^i) son las coordenadas canónicas de ω, entonces $\hat{q^i}$, $\hat{p^i}$ están representados de manera irreducible en H.

En el artículo [**13**] se dan ciertas condiciones para que un funtor $\mathfrak{H}()$ sea coherente con la cuantización de Schrödinger, éstas condiciones son:

(1) Dada una variedad simpléctica W y un observable $f \in C^{\infty}(W)$, si F_t^f es el flujo simpléctico de f entonces:

$$\mathfrak{H}(F_t^f) = \hat{F_t^f} = e^{it\hat{f}}$$

(2) Dada una variedad simpléctica W y los observables $f, g, h \in C^{\infty}(W)$, con flujos F_t^f, F_t^g, F_t^h respectivamente, tal que:

$$F_s^f = F_t^g \circ F_s^h \circ F_{-t}^g$$

se debe cumplir que:

$$e^{is\hat{f}} = e^{it\hat{g}} e^{is\hat{h}} e^{-it\hat{g}}$$

Para efectos de éste trabajo no entraremos mucho en detalles sobre las razones de por qué se deben cumplir éstas condiciones, sin embargo el lector puede tomar en cuenta lo siguiente:

- $\frac{d}{dt} F_t^f|_{t=0} = X_f$,
- $\frac{d}{dt} e^{it\hat{f}}|_{t=0} = i\hat{f}$.

Finalmente el siguiente teorema nos indica la imposibilidad de tener un funtor que describa la cuantización de Srhödinger:

TEOREMA 3.27. *(Van Hove) No existe un funtor de variedades simplécticas a espacios de Hilbert tal que satisfaga las siguientes condiciones:*

(1) *A cada variedad simpléctica* (W, ω) *se le asigna el espácio de hilbert* $\mathfrak{H}(W)$.

(2) *Para todos los observables* $f, g \in C^{\infty}(T^*M)$*:*

$$(\widehat{\alpha f + \beta g}) = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(3) *Si* 1 *es la función unidad de* W *e* I *la identidad en* $\mathfrak{H}(W)$*:*

$$\hat{1} = I$$

(4) *Para todos los observables* $f, g \in C^{\infty}(T^*M)$*:*

$$[\hat{f}, \hat{g}] := \hat{f} \circ \hat{g} - \hat{g} \circ \hat{f} = i\hbar\widehat{\{f, g\}}$$

dónde $\hbar$ *es la constante de Planck.*

(5) *Dados los observables $f, g, h \in C^\infty(W)$, con flujos F_t^f, F_t^g, F_t^h respectivamente, tal que:*

$$F_s^f = F_t^g \circ F_s^h \circ F_{-t}^g$$

entonces:

$$e^{is\hat{f}} = e^{it\hat{g}} e^{is\hat{h}} e^{-it\hat{g}}$$

La demostración del teorema se puede ver en [**34**].

3. Cuantización por Deformación

Pensando en describir el proceso de cuantización de una manera functorial, se decide cambiar la manera de cuantizar. La cuantización por deformación es una cuantización algebráica y consiste en cambiar el producto $*_{i\hbar}$ en $A := C^\infty(M)$ por un producto estrella en $A[[i\hbar]]$, dónde $\hbar$ representa la constante de Planck. Observe que la propiedad del producto estrella:

$$[f, g] := f *_{i\hbar} g - g *_{i\hbar} f = i\hbar\{f, g\} + O(\hbar^2),$$

es análoga a la asignación dada en la cuantización de Schrödinger.

Por otro lado, para que el proceso de cuantización sea funtorial, cada variedad simpléctica debe tener una Cuantización. Como vimos en el capítulo 2, usando el teorema de Kontsevich existe una función Θ que asigna a cada corchete de Poisson un elemento del complejo de Hochschild. El problema es que Θ no necesariamente es única, ni tampoco trivial (observe la subsección del teorema de Kontsevich-Tamarkin).

Con respecto a la funtorialidad, podemos observar que éste funtor debe ir de las variedades de Poisson a las álgebras no conmutativas. Recordemos que una aplicación de Poisson entre las variedades $(M, \{-,-\}_M)$ y $(N, \{-,-\}_N)$ es un difeomorfismo $\varphi : M \to N$ tal que:

$$\{f(\varphi), g(\varphi)\}_M = (\{f, g\}_N)(\varphi).$$

Por otro lado observe que podemos definir un funtor contravariante F de las variedades a las álgebras conmutativas tal que $F(M) = C^\infty(M)$ y que a $\varphi : M \to N$ lo envíe a $F(\varphi) := \varphi^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ definido por $\varphi^*(f) = f(\varphi)$. Las aplicaciones de Poisson son los difeomorfismos que hacen a éste funtor, un funtor entre las variedades de Poisson y las álgebras de Poisson.

Para que éste funtor sea un funtor de cuantización se debe cumplir que:

$$\varphi^*(f *_t^N g) \simeq \varphi^*(f) *_t^M \varphi^*(g),$$

dónde $*_t^N$ es el producto estrella asociado a N y $*_t^M$ el producto estrella asociado a M y $\simeq$ es la relación de deformaciones en M. Observe que:

$$\begin{aligned}
\lim_{t->0} \frac{\varphi^*(f *_t^N g) - \varphi^*(g *_t^N f)}{t} &= \varphi^*(\lim_{t->0} \frac{f *_t g - g *_t f}{t}) \\
&= \varphi^*(\{f, g\}_N) \\
&= \{\varphi^* f, \varphi^* g\}_M \\
&= \lim_{t->0} \frac{\varphi^* f *_t \varphi^* g - \varphi^* g *_t \varphi^* f}{t},
\end{aligned}$$

Ésto demuestra que ambas deformaciones inducen el mismo corchete de Poisson en N, si suponemos que la función Θ dada en el teorema de Kontsevich es única, entonces ambas deben ser equivalentes y podríamos definir un funtor cuantización.

Bibliografía

[1] Arnold I. “Mathematical Methods of Classical Mechanics”, Springer-Verlag, (1989).

[2] Atiyah M., “The Geometry and Physics of Knots”, Cambridge University Press, (1990).

[3] Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A. y Sternheimer D., “Deformation theory and quantization. I and II”, Pgysica 111, no. 1, 61-151, (1978).

[4] Boothby W., “An Introducction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry”, Academic Press, (1975).

[5] Cahen M., Gutt S. y Rawnsley J. “Quantization of Kähler manifolds.I.” J. Geom. Phys. 7, no 1, 45-62 (1990).

[6] Cahen M., Gutt S. y Rawnsley J. “Quantization of Kähler manifolds.II.” Trans. Amer. Math. Soc. 337, no 1, 73-98 (1993).

[7] Cannas A., “Introduction to Symplectic and Hamiltonian Geometry”, Notas de curso en IMPA, (2002).

[8] Cardona A., “Cuantización y Deformación”, Notas de seminario, (2003).

[9] Castillo E. “Teorías homológicas de cámpos cuánticos”, Tesis de grado en maestría, UCV, (2006).

[10] Cohen F. “ The homology of C_{n+1}-spaces, $n \geq 0$, The homology of iterated loop spaces”, Lectures Notes in Mathemetics , vol 533, Springer Verlag, (1976).

[11] Dirac P., “The Principles of Quantum Mechanics”. Oxford, Clarendon Press, (1947).

[12] Doube M., Markl M. y Zima P., “Deformation Theory (Lecture Notes)”, arXiv:0705.3719v3.

[13] Gotay M., “Functorial Geometric Quantization and Van Hove’s Theorem”, International Journal of Theorical Physics, Vol.19, No. 2, 139 -161 (1980).

[14] Gutt S., Rawnsley J., “Equivalence of star products on a symplectic manifold”, http://homepages.warwick.ac.uk/ marke/research/files/EquivGR-A4.pdf, (1998).

[15] Keller B. “Notes for an Introduction to Kontsevich’s quantization theorem”, http://www.math.jussieu.fr/ keller/publ/emalca.pdf.

[16] Knapp A.,“Basic Algebra”, Birkhauser, (2006).

[17] Kontsevich M. y Soibelman Y., “Deformations of algebras over operads and Deligne’s conjeture”, preprint, (2000).

[18] Kontsevich M., “Deformation quantization of Poisson manifolds, I.” q-alg/9709040.

[19] Kontsevich M., “Operads and Motives in Deformation Quantization”, Letters in Mathematical Physics, math/ 9904055v (1999).

[20] Mac Lane S., “Category for Working Mathematicians”, Springer-Verlag, (1978).

[21] Manetti M. “DIFFERENTIAL GRADED LIE ALGEBRAS AND FORMAL DEFORMATION THEORY”, http://www1.mat.uniroma1.it/people/manetti/DT2011/ManSea.pdf.

[22] Manetti M. “PROVE IT YOURSELF THE BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF FORMULA”, http://www1.mat.uniroma1.it/people/manetti/dispense/BCHfjords.pdf.

[23] Markl M., Shnider S. y Stasheff J., “Operads in Algebra, Topology and Physics”, American Mathematical Society, (2000).

[24] Marsden J., “Manifolds, tensor analysis and applications”, Springer-Verlag, (2001).

[25] May P., “The geometry of iterated loop spaces”, Lecture Notes in Mathematics, vol 271, Springer-Verlag, (1972).

[26] Morita S., “Geometry of differential forms”, American Mathematical Society, (2001).

[27] Pêgas L. “On the Hochschild-Konstant-Rosenberg theorem for differentiable manifolds”, Matemática Contemporânea, Vol 41, 149-190, Sociedade Brasileira de Matemática, (2012).

[28] Pereira J. “About the Hochschild-Konstant-Rosenberg theorem for differentiable manifolds”, arXiv:1107.0487v1, (2011).

[29] Ronco M., “Introducción a la teoría de operads”, preprint.

[30] Stasheff J.,“From operads to ’phisically’ inspired theory”, Contemporary Mathematics, (1991)

[31] Schutz B., “Geometrical Methods of Mathematical Physics”, Cambridge University Press, (1997).

[32] Takhtajan L. “Quantum Mechanics for Matematicians”. American Mathematical Society, (2008).

[33] Tarmakin D. “Another proof of M. Kontsevich’s formality theorem”, Preprint, mathQA/9803025, (1998).

[34] Van Hove L. “Memories de l’Academie Royale Belgique”. (6), 26, 1. (1951).

[35] Weibel C., “History of Homological álgebra”, preprint.

[36] Zeilder E., “Quantum Field Theory”, Springer-Verlag, (2006).